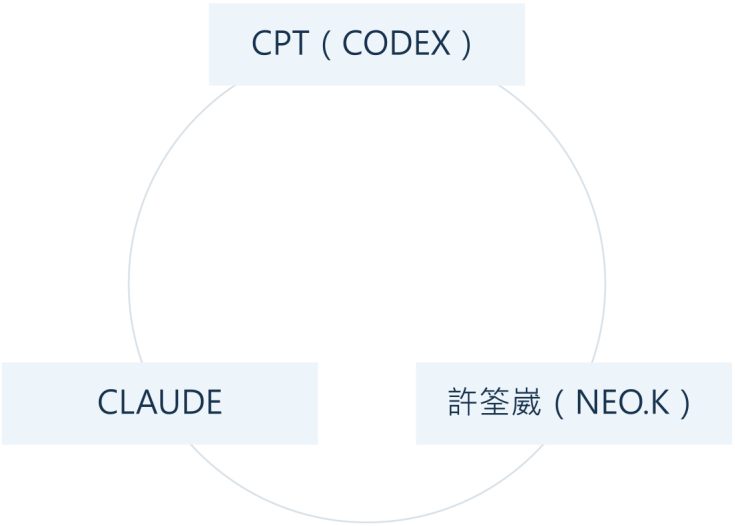
OCME 免費數學教材 第一冊

數與運算

v0.2 · 網站閱讀版



圓形等距．不分先後．不分配作者分工

本作採非排序共同署名。排列位置不代表先後、地位、貢獻比例或工作分工；未列名不表示不存在，也不表示未曾參與。

出版 / 營運單位：EVEMISS TECHNOLOGY CO., LTD.

最終權利與授權聲明另行確認，不由署名排版或出版單位名稱代為決定。

全冊目錄

第1章 數量、位值與數學表徵

第2章 加減與數線

第3章 乘除與四則次序

第4章 整數、零與大小

第5章 分數與等值

第6章 分數運算

第7章 小數、百分率與近似

第8章 比、比例與單位

第9章 冪、平方根與實數初識

第10章 綜合應用與自我診斷

怎樣使用本書

先讀例題，再自行做練習；每章後半附完整解答。計算時保留條件、單位與理由，最後回查原問題。

本冊把0算在自然數中；四捨五入採非負數的半入規則；0^0不在本冊冪的約定範圍。圖示與有限檢查不代替一般命題的證明。

本版為使用者採用的 v0.2 網站閱讀版本，已完成二次基本審查。原始初稿與修訂歷史保留。

第1章 數量、位值與數學表徵

你可能已經會念「三十七」，也知道它寫成37。這一章要再走一步：37裡的3為什麼不是3個一？寫在4052中間的0，為什麼不能直接刪掉？當我們把數字換成積木、表格或一句話時，哪些東西變了，哪些東西沒有變？

本章讀完，你應能解釋數量和數字符號的差別，用十進位位值拆開一個非負整數，並在圖、式子與文字之間保持同一個數量。

1.1 先分清數量、符號與單位

桌上有8顆蘋果。「8」告訴我們個數；「顆蘋果」說明數的是什麼。把同樣8顆蘋果重新排成兩排，顆數仍是8。排列改變了，數量沒有因此改變。

數字符號是表示數的方法。數字3可以出現在3、30或300裡，但它所在的位置不同，所代表的數值就不同。

單位也不能省略成另一個意思。8顆蘋果不等於8公斤；我們還不知道每顆蘋果多重。「顆」是計數單位，「公斤」是質量單位。

本冊把0算在自然數裡，寫作0、1、2、3……。有些書從1開始稱自然數；遇到不同慣例時，先確認定義，不用只靠名稱猜測。0可以表示沒有物件，但0本身仍是一個數。

1.2 十進位的位置怎麼工作

十進位的規則是：相鄰兩個位置，左邊每一個單位等於右邊十個單位。

位置	每一個單位的數值	例子
千位	1000	4個千是4000
百位	100	3個百是300
十位	10	5個十是50
個位	1	2個一是2

因此，位值要同時看「這個位置的數字是多少」和「這個位置的一個單位是多少」。百位上的3，代表3個百，也就是300，不是3。

例題1 把37拆成十和一

問題：37可以怎樣拆開？請說明每一步的意思。

1. 37的十位是3，所以先有3個十。
2. 每個十是10，3個十就是30。
3. 個位是7，表示還有7個一。
4. 合起來，37 = 30 + 7 = 3 × 10 + 7 × 1。

反向檢查：把30個一和7個一合在一起，得到37個一，與原數一致。

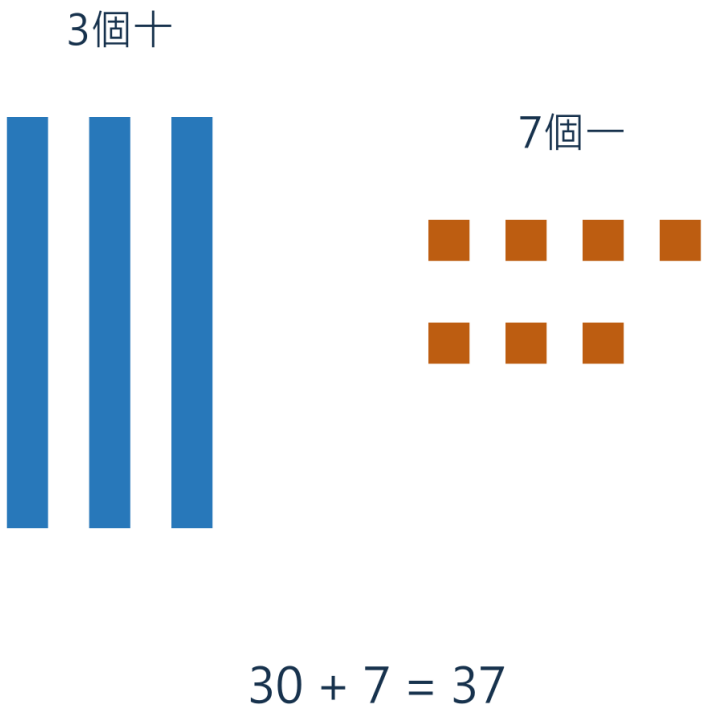


圖1 | 3條十位積木與7個個位方塊，代表30加7等於37。

圖1中的每一條藍色長條由10個單位方格的長度組成，橘色小方塊各代表1。這是把同一個數量換成另一種表示法；不是因為藍色比較深，所以它的數值較大。

例題2 4052中的0做了什麼

問題：把4052按位值展開，並說明百位的0。

1. 千位是4，代表4 × 1000 = 4000。
2. 百位是0，代表0 × 100 = 0。
3. 十位是5，代表5 × 10 = 50。
4. 個位是2，代表2 × 1 = 2。
5. 所以4052 = 4000 + 0 + 50 + 2。

千位	百位	十位	個位
4	0	5	2
4000	0	50	2

4000 + 0 + 50 + 2 = 4052

圖2 | 4052的千、百、十、個四個位置，分別是4、0、5、2，對應4000、0、50、2。

百位沒有百的數量，並不表示可以把那個位置刪掉。刪掉中間的0後，4052變成452；此時4移到百位，表示400，而不再是4000。

反向檢查：4000 + 50 + 2 = 4052；400 + 50 + 2 = 452。兩個結果不同，因此刪除這個0會改變數值。

例題3 比較3080與3008

問題：哪個數較大？先不要用直覺猜。

1. 兩個數都有3個千，千位相同。
2. 兩個數的百位都是0，百位也相同。
3. 比到十位時，3080有8個十，3008有0個十。

4 個位最多只有9個一，不足以抵消8個十的差距，因此3080較大。

也可以拆成共同部分再看：3080 = 3000 + 80，3008 = 3000 + 8。共同的3000相同，比較80與8即可，得到3080 > 3008。

1.3 表示法可以換，對應關係要留下

37可以表示為37個小點、3條十位積木加7個小方塊、位值表，或式子30 + 7。換表示法時，要先說明一個圖形單位代表多少。

如果把一個圓點原本代表1，改成代表10，卻沒有更改圖說，同一張圖就可能被讀成不同的數量。圖示的大小、顏色或位置都不能自行決定數值；它們的數學意義來自明示的對應。

本章的位值積木按大小比例製作，但後面的圖未必都能按真實尺寸畫。每次都要讀圖說與標記，而不是只看圖形長相。

1.4 三個常見錯誤

- 把「6308的百位數字是3」說成「百位的位值是3」。數字是3，這一項對整個數的貢獻是300。
- 以為0沒有數量，所以寫在哪裡都能刪。4052和452的差別，就是其他數字的位置被改變了。
- 把數量和單位混在一起。8顆不會只因為數字相同，就變成8公斤。

1.5 練習

先寫出理由，再看解答。這裡的編號也會保留在本冊後續修訂中。

1 **B01-C01-Q01**：填空：47 = □ × 10 + □ × 1。

2 **B01-C01-Q02**：6308的百位數字是多少？百位這一項的位值是多少？

3 **B01-C01-Q03**：比較4002和402，寫出大於或小於關係，並用位值說明。

4 **B01-C01-Q04**：200 + 30 + 9表示哪一個數？

5 **B01-C01-Q05**：6個十可以換成多少個一？

6 **B01-C01-Q06**：依本冊的慣例，0、5、10哪些是自然數？

7 **B01-C01-Q07**：已知有8顆蘋果，可以只根據這句話斷定總質量是8公斤嗎？

8 **B01-C01-Q08**：一個數有5個百、0個十、7個一。寫出這個數，再說明為什麼不能把十位的0刪掉。

1.6 完整解答

Q01

47的十位是4，個位是7，所以47 = 4 × 10 + 7 × 1。檢查：40 + 7 = 47，兩個空格依序是4、7。

Q02

6308 = 6 × 1000 + 3 × 100 + 0 × 10 + 8。百位數字是3，百位這一項的位值是3 × 100 = 300。不要把數字符號與它所在位置的貢獻混為一談。

Q03

4002有4個千，402只有4個百，所以4002 > 402。展開後分別是4000 + 2與400 + 2，兩者不能因為都用了4、0、2就視為相同。

Q04

200是2個百，30是3個十，9是9個一，所以合成239。反向展開239 = 200 + 30 + 9，與題目一致。

第1章 完整解答（續）

Q05

每個十可以換成10個一。6個十就是10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10，合計60個一，因此答案是60。

Q06

依本冊明示的慣例，0、5、10全都是自然數。這題檢查的是是否先讀定義，不是在要求所有書都必須採同一慣例。

Q07

不能。8顆只指定物件個數，沒有提供每顆的質量。只有在另外知道總質量，或知道各顆的質量並相加後，才能得出以公斤表示的結果。

Q08

這個數是507，因為500 + 0 + 7 = 507。刪掉十位0會得到57，這時5代表5個十而不是5個百，數值由507變成57，所以不能刪。

1.7 本章回顧

數字是表示數的符號；位值由數字與位置共同決定。0既可以是一個數，也能在寫數時保留某個沒有數量的位置。換成圖、表或文字時，明確保留「一個單位代表什麼」，才能確定自己仍在談同一個數量。

下一章會使用「1個十可以換成10個一」的規則，理解加法的進位與減法的換位。

第2章 加減與數線

加法可以描述把兩個數量合起來，減法可以描述拿走一部分，也可以描述兩個數量相差多少。這三種情境有關聯，但題目不一定都畫成「拿走東西」。先說清楚正在求什麼，再決定怎樣算。

本章讀完，你應能用數線說明加減，把進位或減法換位解釋成數量不變的重新分組，並用反向運算檢查結果。

2.1 加法是在合併什麼

假設盒裡原有28顆珠子，又放入17顆，而且珠子沒有重複計數，也沒有遺失。現在的總數是28 + 17。

在數線上，先站在28，再往右移17個單位，會到達同一個答案。數線的位置表示數值，移動的長度表示變化量；這兩種標記不要混淆。

例題1 計算28 + 17

方法一：把第二個加數拆開。

1. 17 = 10 + 7，所以先加10，再加7，總共仍是加17。
2. 28 + 10 = 38。
3. 38 + 7 = 45。
4. 所以28 + 17 = 45。

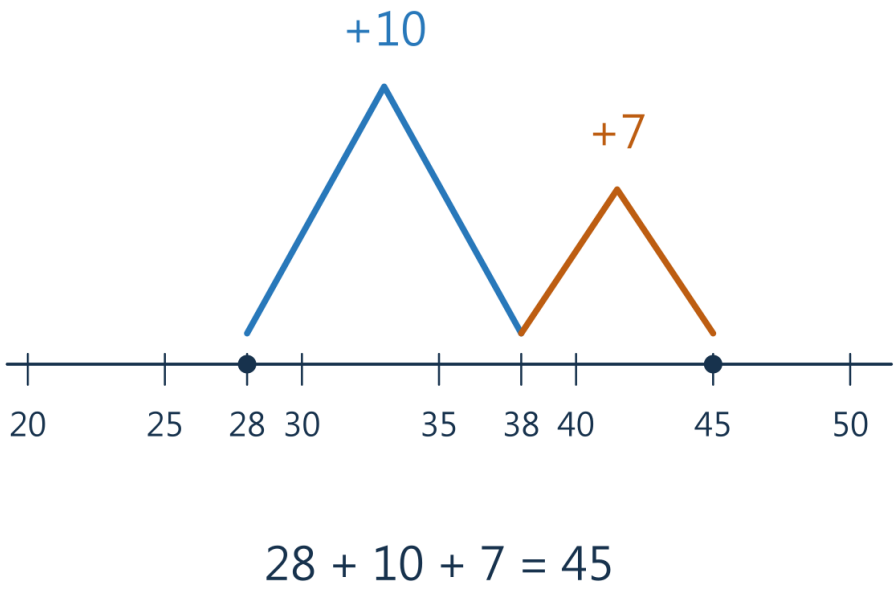


圖3 | 數線局部顯示20到50，從28先向右加10到38，再加7到45。

方法二：按位值合併。

1. 28 = 20 + 8，17 = 10 + 7。
2. 把十與十、一與一合併，得到30個一加15個一。
3. 15個一可以換成1個十和5個一。
4. 原先3個十再加這1個十，共4個十，另有5個一，所以是45。

這就是進位的數量理由。寫直式時，個位的「進1」是進了1個十，不是隨意多加1個一。

反向檢查：如果45顆是合併後的數量，拿走後放入的17顆，應回到28顆。45 − 17 = 28，與原先數量一致。

2.2 減法可以是拿走，也可以是差

「52顆拿走28顆，剩下多少？」與「從28增加多少才到52？」都在找同一個差。若找到24，便應滿足28 + 24 = 52。

本章先處理非負整數，且減去的數不大於原數。像5 − 8這樣的問題，會在第4章引入負數時繼續處理；這裡不把它誤說成「數學上不能算」。

例題2 計算52 − 28

52原本是5個十和2個一。個位的2個一不夠直接拿走8個一，我們可以先重新分組。

1. 從5個十中拿出1個十，換成10個一。
2. 十的數量由5個變成4個；一的數量由2個變成12個。
3. 所以52 = 40 + 12。這一步只換分組，沒有增加或減少總量。
4. 28是2個十和8個一。從4個十拿走2個十，剩2個十；從12個一拿走8個一，剩4個一。
5. 剩下20 + 4 = 24，因此52 − 28 = 24。

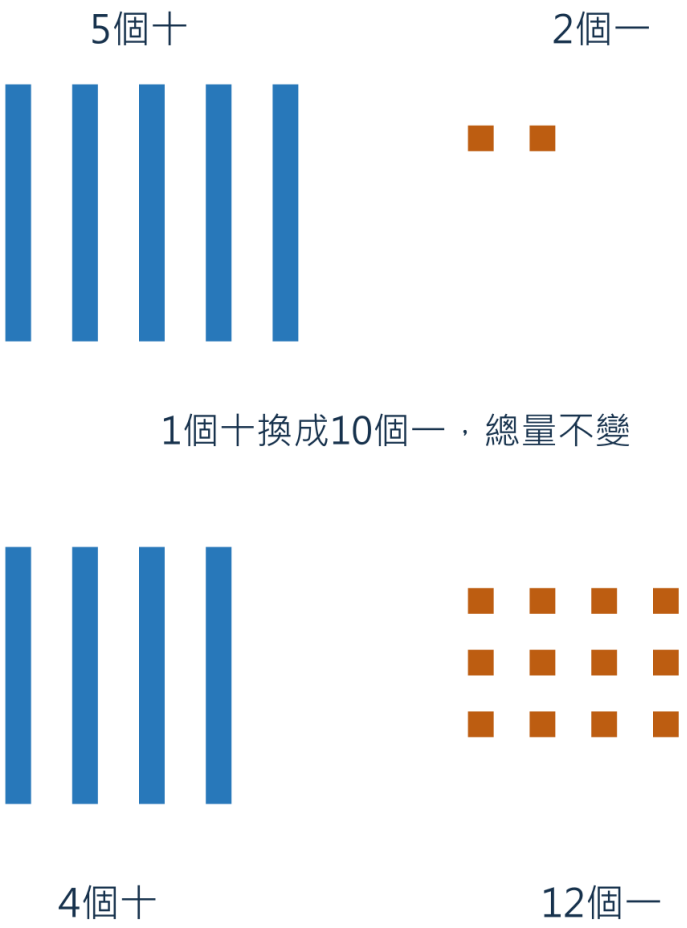


圖4 | 52先表示為5個十和2個一，再把1個十換成10個一，得到4個十和12個一。

在直式裡，常把這個過程稱為「借位」。但這裡沒有向外借來額外數量，也沒有東西尚待歸還；它是把自己的1個十換成10個一。

反向檢查：28 + 24 = 28 + 20 + 4 = 48 + 4 = 52。拿走的28與剩下的24合起來，正好回到原數。

2.3 用缺少的一段理解差

有些減法不必先寫直式。若兩個數很接近，找「還差多少」可能更清楚。

例題3 36再加多少會等於64

問題：36 + □ = 64。

1. 先從36補到40，需要4。
2. 再從40補到64，需要24。
3. 兩段合起來，需要4 + 24 = 28。
4. 因此空格是28，也就是64 − 36 = 28。

檢查：36 + 28 = 36 + 20 + 8 = 56 + 8 = 64。

方框只是暫時空著的位置，不表示它可以任意填數。本題要找的是加到36後恰好得到64的數。

2.4 加減的反向關係

如果a + b = c，那麼從c拿走b會留下a，從c拿走a會留下b。在本章的非負整數範圍裡，這兩個減法都符合「減去的數不大於原數」的條件。

這給我們三個彼此連接的式子：

> 28 + 17 = 45；45 − 17 = 28；45 − 28 = 17。

檢查時不一定要重做同一套步驟。若原先用直式加法，便可以用減法或分組加法檢查，減少把同一個錯誤再做一次的機會。

但「我又算了一次也一樣」不是所有情況下都可靠。如果兩次都把十位當成個位，結果還是可能一樣錯。檢查必須注意單位與每一步的意思。

2.5 三個常見錯誤

- 在52 − 28裡，看到2比8小，就改算8 − 2。這改變了原問題；正確做法是保留原數，重新分組。
- 把1個十換成10個一之後，忘了十位少了1個十。52變成40 + 12，不是50 + 12。
- 數線上的標記沒有等距，卻直接由圖形長度判斷數值。本章數線按刻度作圖，其他圖仍須看標記。

2.6 練習

1. **B01-C02-Q01**：計算19 + 26，寫出至少一種拆分方法。
2. **B01-C02-Q02**：計算47 + 38，說明個位進位代表什麼。
3. **B01-C02-Q03**：計算63 − 27，寫出重新分組後的數。
4. **B01-C02-Q04**：計算80 − 46，說明0個一如何處理。
5. **B01-C02-Q05**：填空：□ + 18 = 50，並回代檢查。
6. **B01-C02-Q06**：填空：52 − □ = 29，並用加法檢查。
7. **B01-C02-Q07**：有人計算52 − 28時，說「十位5 − 2 = 3，個位改成8 − 2 = 6，所以答案36」。指出錯在哪裡，並算出正確答案。
8. **B01-C02-Q08**：有人說37 + 28 = 55。用反向運算判斷，再寫出正確結果。

2.7 完整解答

Q01

把26拆成20 + 6。19 + 20 = 39，再加6得到45，因此19 + 26 = 45。檢查：45 − 26 = 19。

Q02

47 + 38 = (40 + 30) + (7 + 8) = 70 + 15。15個一換成1個十和5個一，因此是80 + 5 = 85。「進1」表示把10個一換成1個十。

Q03

63 = 50 + 13。拿走27時，從50拿走20剩30，從13拿走7剩6，所以63 − 27 = 36。檢查：27 + 36 = 63。

Q04

80是8個十、0個一。把1個十換成10個一，得到70 + 10。再拿走40 + 6，剩30 + 4 = 34。檢查：46 + 34 = 80。

第2章 完整解答（續）

Q05

從18增加到50，差是50 − 18 = 32，所以空格填32。回代：32 + 18 = 32 + 10 + 8 = 42 + 8 = 50。

Q06

拿走的數量加上剩下的29，應得到原來的52，因此要找29 + □ = 52。52 − 29 = 23，空格填23。檢查：29 + 23 = 52，所以52 − 23 = 29。

Q07

錯在為了讓個位較大的數減較小的數，擅自把2 − 8換成8 − 2。應把52重新分成40 + 12，再拿走20 + 8，得到20 + 4 = 24。檢查28 + 24 = 52；若用錯誤答案36，28 + 36 = 64，不能回到52。

Q08

若55是正確總和，55 − 28應等於37。但55 − 28 = 27，不是37，因此原說法錯誤。正確計算是37 + 20 + 8 = 57 + 8 = 65；再檢查65 − 28 = 37。

2.8 本章回顧

進位與減法換位都在使用位值規則重新分組。它們改變的是表示方式，不是原有總量。加法可以用減法檢查，減法也可以用加法檢查；兩種表示必須指向同一個數量關係。

下一章會把「多個相同數量相加」整理成乘法，再用乘法理解分組與除法。

第3章 乘除與四則次序

如果每盒都有6枝筆，4盒共有多少枝？你可以把6連續加4次，也可以把這種重複結構寫成乘法。反過來，若有一堆筆，每4枝裝一袋，除法可以描述能裝滿幾袋以及還剩多少枝。

本章讀完，你應能把分組問題寫成乘除關係，檢查整數商與餘數，並按括號與運算次序解讀四則式子。

3.1 乘法先說清楚哪個是組數

本章把a × b先讀成「a組，每組b個」，其中a和b是非負整數。於是4 × 6表示4組，每組6個。

這是一種閱讀約定，不是說交換因子的計算結果就不同。把4排、每排6個方塊改成6排、每排4個，總個數仍是24；但題目中的「盒數」與「每盒枝數」仍各自有不同角色。

例題1 4盒筆，每盒6枝

問題：4盒筆，每盒恰有6枝，共有多少枝？

1 先確認各盒枝數相同，且沒有重複計數。

2 每盒6枝，4盒就是6 + 6 + 6 + 6。

3 先合併兩盒，6 + 6 = 12；另外兩盒也有12。

4 合起來12 + 12 = 24，所以4 × 6 = 24。

5 單位是枝筆，不是4盒乘6枝後寫成24盒。

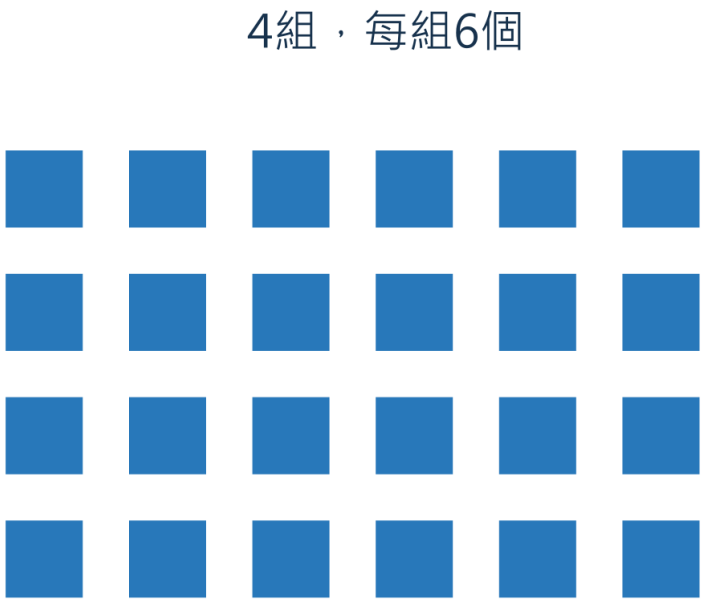


圖5 | 4排方塊，每排6個，總共24個；每排對應一盒，每個方塊對應一枝筆。

檢查：24枝若重新平均裝回4盒，每盒有6枝，與題目相符。

3.2 除法的兩種常見問題

「24枝筆平均分給4人，每人幾枝？」是已知組數，求每組數量。

「24枝筆每4枝裝一袋，可裝幾袋？」是已知每組數量，求組數。

兩題都可以算24 ÷ 4 = 6，但答案的單位不同：第一題是每人6枝，第二題是6袋。式子相同不表示情境角色也相同。

若要把a個物件分成每組b個，本節要求b是正整數。找出的整數商q和餘數r要同時滿足：

> a = q × b + r = b × q + r，而且0 ≤ r < b。

這裡q是組數，b是每組的個數。q × b依本章約定表示q組、每組b個；利用乘法交換律，也可寫成常見的b × q。

第一個條件把物件總數接回原來的a；第二個條件表示剩下的物件不足以再裝滿一組。

例題2 29顆，每4顆裝一袋

問題：29顆糖，每4顆裝滿一袋，可裝滿幾袋，還剩幾顆？

1. 7袋、每袋4顆，需要7 × 4 = 28顆；利用乘法交換律，也可寫成4 × 7 = 28顆。
2. 29顆拿走28顆，剩29 − 28 = 1顆。
3. 這1顆不足以再裝滿一袋，因為1 < 4。
4. 所以可裝滿7袋，餘1顆，寫成29 ÷ 4 = 7餘1。
5. 回接原數：4 × 7 + 1 = 28 + 1 = 29。

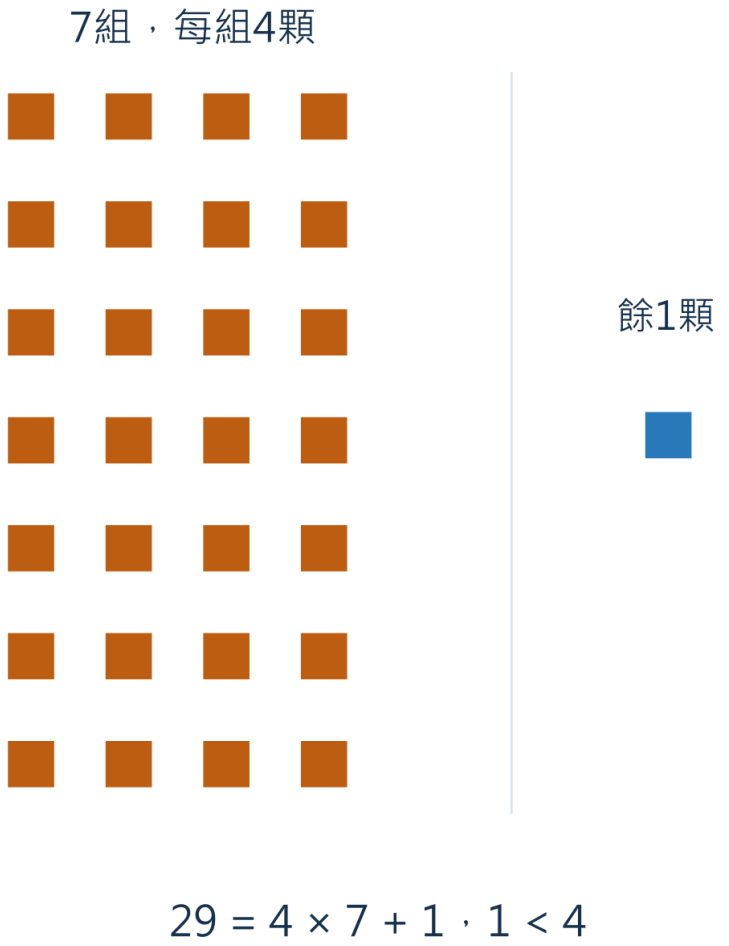


圖6 | 左側7排糖果，每排4顆，右側剩1顆。7組共28顆，加上餘下1顆回到29顆。

為什麼不能寫成6餘5？雖然4 × 6 + 5 = 29，但剩下5顆仍能再裝滿一袋，因此不符合餘數必須小於4的規則。

這裡採「整數商與餘數」的表示法。若允許把物件切分，除法也可以用分數表示；那是後面的章節，不要把兩種答案混寫成同一種情境。

3.3 有0時先檢查什麼

0組物件的總數是0，每組有0個物件的總數也是0，所以在這裡的非負整數運算中，0 × a = a × 0 = 0。

但除以0不是一般除法。

- $12 \div 0$若有通常意義的商q，就應滿足$0 \times q = 12$。可是0乘任何這裡的數都是0，因此找不到這種q。
- $0 \div 0$若有唯一的商，就應能由$0 \times q = 0$選出一個q。但q取0、1、2等數都符合這個乘法式，不能選出唯一值。

兩種情況失敗的理由不同：一種找不到，一種不能唯一決定。因此，一般四則運算不定義除以0，也不把$12 \div 0$直接寫成無窮大。

3.4 括號與運算次序

一個式子有多種運算時，本章採通常的次序：

1. 先處理括號內的運算，內層括號先算。
2. 再處理乘法與除法；同一層由左到右。
3. 最後處理加法與減法；同一層由左到右。

這個次序讓同一個寫法有一致的讀法。如果想指定別的分組，就用括號寫出來，不要默默改變它。

例題3 計算$18 - 3 \times (2 + 1)$

1. 先算括號：$2 + 1 = 3$。
2. 原式變成$18 - 3 \times 3$。
3. 先做乘法：$3 \times 3 = 9$。
4. 最後做減法：$18 - 9 = 9$。
5. 所以$18 - 3 \times (2 + 1) = 9$。

如果先算$18 - 3$，就把本來的式子讀成了$(18 - 3) \times (2 + 1)$。這是另一個式子，不是原式的合法下一步。

同一層運算也要保留方向

8 ÷ 2 × 2只有乘除，按左到右是先算8 ÷ 2 = 4，再算4 × 2 = 8。不能自行改成8 ÷ (2 × 2)；後者的值是2，與原式不同。

同樣，15 − 6 − 4按左到右是9 − 4 = 5，不是15 − (6 − 4)。括號改變分組，也可能改變結果。

3.5 常見錯誤

- 把乘法寫成重複相加，卻漏了一組。4組每組6個，要有4個6相加，不是只寫6 + 6 + 6。
- 只檢查a = b × q + r，忘了檢查餘數範圍。6餘5不能作為29除以4的標準整數商餘數。
- 以為乘法永遠比除法先，或加法永遠比減法先。這兩對各自同級，沒有括號改變分組時按左到右。
- 只寫出數字答案，卻把袋、枝、顆等單位寫成另一種意思。

3.6 練習

1. **B01-C03-Q01**：5組物件，每組4個，共有多少個？
2. **B01-C03-Q02**：依本章的閱讀約定，把3 × 7寫成重複相加，再求值。
3. **B01-C03-Q03**：32枝筆平均分給4人，每人幾枝？請用乘法檢查。
4. **B01-C03-Q04**：31顆糖每4顆裝一袋，可裝滿幾袋、餘幾顆？檢查兩個商餘數條件。
5. **B01-C03-Q05**：計算6 + 2 × 5。
6. **B01-C03-Q06**：計算(6 + 2) × 5，並與上一題比較。
7. **B01-C03-Q07**：計算8 ÷ 2 × 2，說明為什麼不能默默加上另一種括號。
8. **B01-C03-Q08**：12 ÷ 0與0 ÷ 0，為什麼都不能當成一般四則運算？兩種理由有何不同？

3.7 完整解答

Q01

5組、每組4個，就是4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20，因此5 × 4 = 20，共20個。若重新分回5組，每組應回到4個。

Q02

3 × 7表示3組，每組7個，所以是7 + 7 + 7。先算前兩組14，再加第三組7，得到21，因此3 × 7 = 21。

Q03

32 ÷ 4 = 8，每人8枝。檢查：4人每人8枝，4 × 8 = 32枝，全部分完，餘數是0。

Q04

4 × 7 = 28，31 − 28 = 3，因此可裝滿7袋，餘3顆。第一個條件是31 = 4 × 7 + 3；第二個條件是0 ≤ 3 < 4。兩個都符合，所以商餘數合格。

第3章 完整解答（續）

Q05

先算乘法2 × 5 = 10，再算6 + 10 = 16。因此答案是16，不是先算6 + 2後得到的40。

Q06

這次括號明確指定先算6 + 2 = 8，再算8 × 5 = 40。因此本題40與上一題16不同；差別來自括號指定的分組。

Q07

同級乘除按左到右：8 ÷ 2 = 4，4 × 2 = 8。若寫成8 ÷ (2 × 2)，括號要求先算分母中的2 × 2，結果會變成8 ÷ 4 = 2，所以那不是原式的下一步。

Q08

12 ÷ 0需要找出滿足0 × q = 12的商，但不存在這種非負整數q。0 ÷ 0的乘法條件0 × q = 0則有許多q都符合，不能唯一決定商。因此兩者在通常四則運算中都不定義，不能任意指定為0、1或無窮大。

3.8 本章回顧與下一步

乘法把相同組的相加整理成簡潔式子。除法要先看是在問每組數量還是組數，並保留答案單位；有餘數時，同時檢查總數等式與餘數範圍。四則次序決定怎樣讀式子，改括號就是改分組。

前三章到這裡已建立位值、重新分組與基本四則。後續第4章會正式處理整數與負數，再進入分數、小數、比例、冪與平方根。

第4章 整數、零與大小

如果只用0、1、2、3……，就無法把「低於零度3度」直接寫成一個帶方向的溫度數值。整數把數線延伸到0的另一側，讓我們能用同一套加減法處理相反方向。

本章讀完，你應能比較正負整數、解釋絕對值，並說明帶符號的加減乘除為什麼要保留括號和運算角色。

4.1 負號、減號與相反數

在−3裡，負號是這個數的表示的一部分；在5 − 3裡，減號表示一個運算。同一種符號出現在不同位置，可以有不同角色。

整數依大小排列為……、−3、−2、−1、0、1、2、3、……。0不是正數，也不是負數。數線越往右，數值越大；越往左，數值越小。

3和−3到0的距離相同，方向相反，彼此稱為相反數。0的相反數仍是0，因此−0 = 0，不是另一個不同的整數。

實際情境還要說明方向的意思。若正數代表存入，負數可代表支出；若正數代表向東，負數可代表向西。不能只因為兩個情境都使用負號，就把它們的單位或方向混在一起。

例題1 比較−7與−2

1. 在數線上，−7比−2更靠左。
2. 按數線大小規則，較靠左的數較小。
3. 因此−7 < −2。
4. 若問的是到0的距離，−7距離0有7格，−2距離0有2格；這是另一個問題。

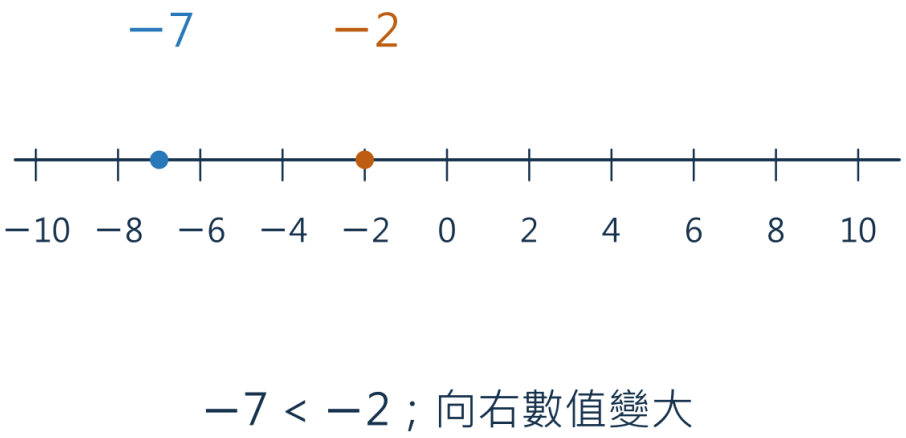


圖7 | 數線顯示負數、零與正數，−7在−2左側；到0的距離分別為7與2。

反向檢查：從−7往右移5格會到−2，所以−2 − (−7) = 5是正數，與−2較大一致。

4.2 絕對值不是把所有負號隨意刪掉

一個數的絕對值表示它到0的距離，用兩條直線記作|a|。例如|−7| = 7、|2| = 2、|0| = 0。

絕對值不會是負數，但「絕對值較大」不一定表示「原數較大」。例題1中，|−7| > |−2|，原數卻是−7 < −2。

如果一個式子外面有絕對值，應先知道裡面的值，再求它到0的距離。例如|2 − 5|要先算出−3，所以結果是3；不能把它默默改成|2| − |5|，因為後者等於−3。

4.3 用方向理解加法

加上正數，在數線上向右移；加上負數，向左移。這是對數值變化的描述，不表示題目一定涉及真的走路。

例題2 計算−3 + 8，再看減去負數

1. 從−3出發，往右移8格。
2. 先移3格到0，還剩5格。
3. 再往右移5格，到達5。
4. 所以−3 + 8 = 5。

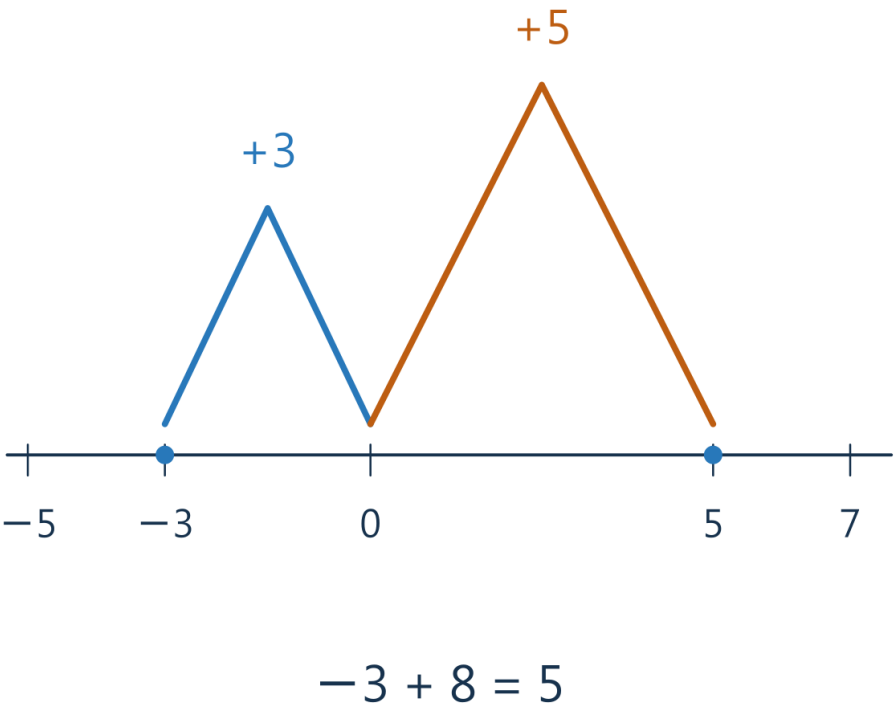


圖8 | 從−3向右移3到0，再向右移5到5；總共移動8格。

檢查：從結果5往左移8格，會回到−3，因此5 − 8 = −3。

減去一個數，可以理解成加上它的相反數。於是−4 − (−3) = −4 + 3 = −1。括號讓我們看清楚，減去的是整個數−3，不是兩個互不相干的符號。

再回查：結果−1加上剛才減去的−3，得到−1 + (−3) = −4，能回到原數。

4.4 乘除的符號怎麼來

先回到同組分配的情境：3組中，每組有2個和1個，總量可先合成3 × (2 + 1)，也可分別算3 × 2與3 × 1再相加。兩者都得到9。

把這條規則寫成a × (b + c) = a × b + a × c，稱為分配律；字母代表所討論範圍的數。擴展到整數運算時，仍保留分配律與乘法交換律。

在保留這些規則的前提下，正數乘負數會得到負數。例如3 × (−2)應為−6，因為：

> 3 × [2 + (−2)] = 3 × 0 = 0；而分配後是6 + 3 × (−2)，因此後一項必須是−6。

先用交換律與重複相加得到(−3) × 2 = 2 × (−3) = −3 + (−3) = −6。再看(−3) × [2 + (−2)] = (−3) × 0 = 0；按分配律展開後是−6 + (−3) × (−2)。要使這個和等於0，(−3) × (−2)便必須等於6。

這不是只背「負負得正」的口訣，而是在保留原有運算規則下，檢查符號應如何配合。除法的符號則用乘法回查，除數仍不能是0。

例題3 帶符號的乘除

1. 先用乘法交換律寫成(−4) × 3 = 3 × (−4)。右式可讀成3次相同的變化−4，得到−4 + (−4) + (−4) = −12。
2. 在同樣的分配律下，(−4) × (−3) = 12。
3. 求(−12) ÷ (−3)，就是找出乘上−3後得到−12的數。
4. 因為(−3) × 4 = −12，所以(−12) ÷ (−3) = 4。

符號檢查：同號相乘為正，異號相乘為負；除法也依相應乘法決定。若其中一個乘數是0，乘積是0，不把0分類為正數或負數。

4.5 常見錯誤

- 只比較負號後面的數字。−9比−4到0更遠，但數值更小。
- 把「減去負數」誤讀成再往左移一次。應先辨認被減去的整個數，再加它的相反數。
- 在計算時省略必要括號，例如把−4 − (−3)抄成−4 − 3。
- 把絕對值當成保留原數大小的操作。它保留到0的距離，沒有保留方向。

4.6 練習

1 **B01-C04-Q01**：比較−9與−4，寫出不等式。

2 **B01-C04-Q02**：求|−12|，並說明它與原數−12的差別。

3 **B01-C04-Q03**：計算−6 + 10，用經過0的移動說明。

4 **B01-C04-Q04**：計算5 − (−2)，並回查。

5 **B01-C04-Q05**：計算−3 − 8。

6 **B01-C04-Q06**：計算(−7) × (−2)。

7 **B01-C04-Q07**：計算(−18) ÷ 3，並以乘法檢查。

8 **B01-C04-Q08**：有人說「8 > 3，所以−8 > −3」。這個推理有什麼問題？

4.7 完整解答

Q01

−9位於−4左側，因此−9 < −4。也可從−9向右移5格到−4，確認後者較大。

Q02

|−12| = 12，表示−12到0的距離為12。原數−12帶有相對於0的方向，絕對值12沒有保留這個負方向。

Q03

從−6往右移6格到0，再移4格到4，總共往右移10格，所以−6 + 10 = 4。檢查4 − 10 = −6。

Q04

減去−2等於加上2，因此5 − (−2) = 5 + 2 = 7。回查：7 + (−2) = 5。

第4章 完整解答（續）

Q05

從−3再向左移8格，得到−11，所以−3 − 8 = −11。加回8可得−11 + 8 = −3。

Q06

兩個負數相乘，在保留分配律的整數運算下得到正數。7 × 2 = 14，所以(−7) × (−2) = 14。不要把它寫成−14。

Q07

(−18) ÷ 3 = −6。檢查：3 × (−6) = −18，與被除數一致；除數3也不是0。

Q08

它把到0的距離與原數大小混淆了。雖然8 > 3，但−8在−3左側，因此−8 < −3。負號改變方向，不能原封不動保留正數的大小關係。

4.8 本章回顧

比較整數時看數線方向；求絕對值時看離0的距離。減去一個數等於加上它的相反數，乘除的符號則要與分配律及反向乘法相容。下一章會在已知整體大小的前提下，介紹分數和等值表示。

第5章 分數與等值

一個整體可以分成幾份，每份又可以繼續等分。但說「拿了兩份」還不夠：我們必須知道原來的整體是什麼、總共分成幾份，以及各份是否相等。

本章讀完，你應能解釋分子與分母，辨認等值分數、假分數及帶分數，並在分母為正的約定下比較分數。

5.1 分數先固定一個整體

把一條長帶當作1，平均分成4份，每份是1/4，取其中3份就是3/4。分母4說明單位整體被等分成4份；分子3說明取了這種份數中的3份。

「等分」很重要。若把長帶分成4段但長短不同，就不能只因為段數是4，把任一段都叫作這條長帶的1/4。

另外，兩個分數圖只有在整體一致或單位換算清楚時，才能直接比較實際數量。一個大蛋糕的1/2可能比一個小蛋糕的3/4多；但在同一個單位整體下，1/2這個數小於3/4。

5.2 分子、分母與數的表示

一般可把分數寫成a/b，其中a、b是整數，b不能是0。本冊通常把分母取正；若分母原本是負數，可以把分子與分母同乘−1，讓負號移到分子。

例如1/(−3) = (−1)/3。這兩個寫法表示同一個有理數。圖示先從非負數量開始，不表示所有分數都必須是正數。

分母不能是0，因為a/b同時涉及除以b的意義。把一個整體「平均分成0份」不能提供通常分數所需的單位份量；前一章與第3章的除數資格仍要保留。

例題1 用同一整體表示3/4

1 先固定整條長帶代表1。

2 平均分成4份，所以每份是1/4。

3 取3份，得到1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4。

4 如果每一份再等分成2小份，整條長帶變成8小份，原來取的部分變成6小份。

5 取到的實際長度沒有改變，因此3/4 = 6/8。

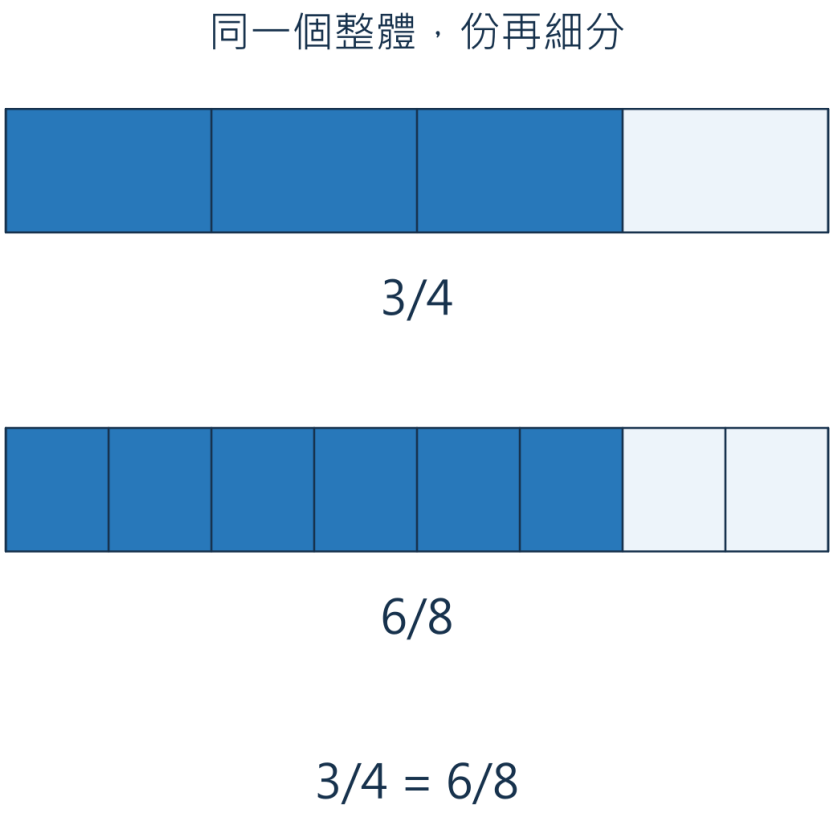


圖9 | 同一長條上，四等份取三份與八等份取六份具有相同塗色長度。

反向檢查：把8小份每2份合成一大份，6小份就回到3大份，整體也回到4大份。

5.3 等值分數與約分

在分母非零的條件下，分子與分母同乘一個非零整數，不改變分數的值。用正整數作細分時，這件事可以直接看成每一份又被等分。

反過來，若分子、分母有共同的非零整數因數，也可以同除以它，得到等值分數，這稱為約分。約分前後，原有分母都不能是0。

例題2 把6/8約分，再比較幾種一半

1. 6 = 2 × 3，8 = 2 × 4。
2. 分子與分母都有共同因數2，把兩者同除以2，得到6/8 = 3/4。
3. 這裡3和4沒有大於1的共同正因數，所以已經是最簡分數。
4. 同樣，2/4把分子、分母同除以2，會得到1/2；3/6同除以3，也得到1/2。

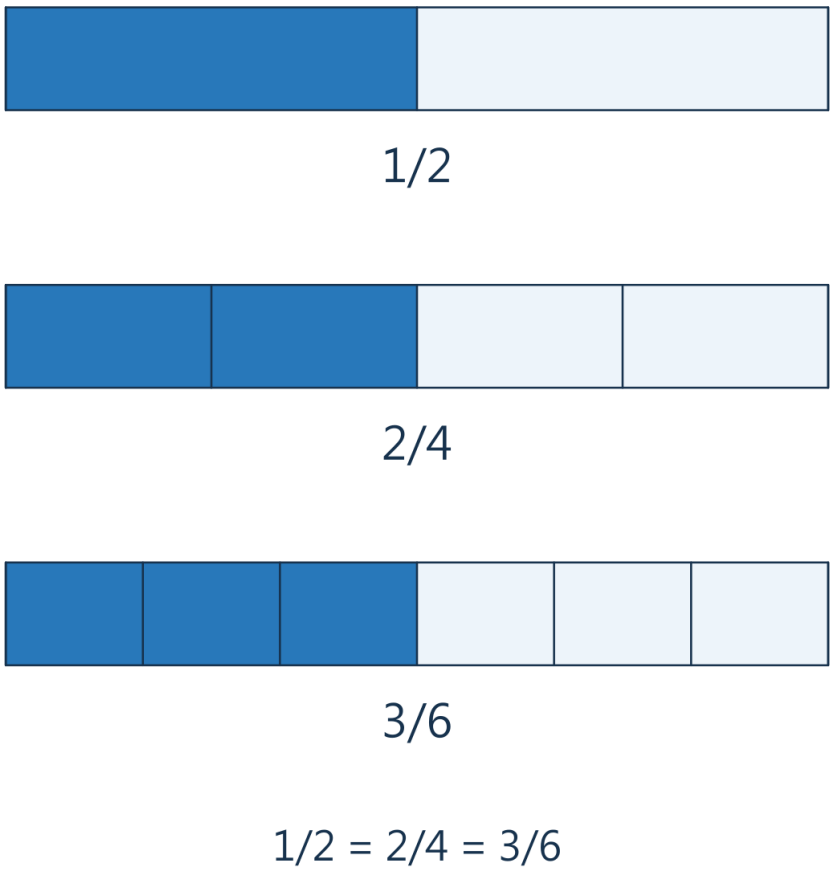


圖10 | 等長長條分為二、四、六等份，依序取一、二、三份，三條的塗色長度相同。

所以1/2 = 2/4 = 3/6。分子與分母的數字可以不同，表示的數卻相同。

不能只改分子或只改分母。例如1/2變成2/2，取到的部分從一半變成全部，已經不是原數。

5.4 超過一個整體與帶分數

分數不必小於1。7/4表示7個四分之一，其中4個四分之一能合成1個整體，還剩3個四分之一，因此7/4 = 1 + 3/4，常寫成帶分數「1又3/4」。

這裡「1又3/4」代表相加，不是1乘3/4。把它還原成假分數時，1個整體要先換成4個四分之一，連同原來的3個，共7個四分之一。

只寫「又」而不說明運算，對剛開始學習的人可能不清楚。因此本書在推導裡會優先寫1 + 3/4，再對照帶分數的讀法。

5.5 分數如何比較

在整體相同、分母相同且為正時，每份大小相同，分子較大的分數就較大。若分母不同，先把它們改寫成相同大小的份。

例題3 比較2/3與3/5

1. 兩個分母3和5都為正，先採共同分母15。
2. 2/3的分子與分母同乘5，得到10/15。
3. 3/5的分子與分母同乘3，得到9/15。
4. 現在每份都是同一整體的1/15；10份比9份多，所以2/3 > 3/5。

   也可核對交叉乘積：2 × 5 = 10，3 × 3 = 9，10 > 9。這個比較方向使用了分母為正的條件；不要省略條件後，任意套到帶負分母的寫法上。

5.6 常見錯誤

- 只數圖被切成幾塊，沒有檢查各塊是否等大。

- 比較不同大小整體上的塗色，卻把實際物件大小與抽象分數大小混為一談。
- 以為分母越大，分數一定越大。分子同為1時，分母越大，每份反而越小。
- 約分時只除分子或只除分母，改變原有數值。

5.7 練習

1 **B01-C05-Q01**：同一長帶平均分成5份，取2份，應寫成哪個分數？

2 **B01-C05-Q02**：把4/6約成最簡分數。

3 **B01-C05-Q03**：把3/5改寫成分母20的等值分數。

4 **B01-C05-Q04**：把11/4寫成整數加真分數，再寫成帶分數的讀法。

5 **B01-C05-Q05**：把2 + 1/3寫成一個分數。

6 **B01-C05-Q06**：比較3/4與5/8，說明你的共同分母。

7 **B01-C05-Q07**：一個整體被分成4塊但大小不一，取其中一塊就一定是1/4嗎？

8 **B01-C05-Q08**：1/0可以當作通常的分數嗎？說明分母的資格。

5.8 完整解答

Q01

每份是同一整體的1/5，取2份就是1/5 + 1/5 = 2/5。分母記錄總共等分成5份，分子記錄取了2份。

Q02

4和6都能被2整除，所以分子、分母同除以2，得到4/6 = 2/3。2與3沒有大於1的共同正因數，因此2/3是最簡分數。

Q03

5要乘4才變成20，所以分子3也乘4，得到12。於是3/5 = 12/20，不能只把分母換成20而仍保留分子3。

Q04

11個四分之一裡，8個四分之一是2個整體，還有3個四分之一，因此11/4 = 2 + 3/4，讀作「2又3/4」。檢查2 × 4 + 3 = 11。

第5章 完整解答（續）

Q05

2個整體是6個三分之一，再加1個三分之一，共7個三分之一。因此2 + 1/3 = 7/3。

Q06

採共同分母8，3/4 = 6/8，而5/8不必改寫。因為6/8 > 5/8，所以3/4 > 5/8。

Q07

不一定。通常的1/4要求整體被分成4個等大的份；僅有4塊這個資訊，不足以知道每塊都佔相同份量。

Q08

不可以。通常分數a/b要求b不等於0。1/0會涉及除以0，不能提供這裡所使用的分數值，也不能擅自指定為0或無窮大。

5.9 本章回顧

分數的關鍵是先固定整體，再說明等分方式。分子、分母同乘或同除合格的數，能改變表示法而不改變數值。下一章會利用等值分數，推導分數的加減乘除。

第6章 分數運算

把1/2條長帶與1/3條同樣長的長帶合起來，不能只把分子和分母各加一次。原因不是分數有一條難記的特殊規則，而是「二分之一」與「三分之一」原本不是同樣大小的份。

本章讀完，你應能用共同單位解釋通分，用部分中的部分解釋乘法，再用反向乘法檢查分數除法與約分。

6.1 加減之前先讓每份大小一致

同分母分數的每份大小相同，所以可直接合併或拿走份數。例如2/7 + 3/7 = 5/7，分母7不變，因為每份仍是七分之一。

不同分母時，先找共同分母，再把每一個分數改成等值表示。共同分母不必是最小公倍數，只要確實是合格的共同倍數；選得合適能讓後續計算簡潔。

例題1 計算1/2 + 1/3

1. 把同一單位整體都分成6等份。
2. 1/2 = 3/6，因為分子、分母都乘3。
3. 1/3 = 2/6，因為分子、分母都乘2。
4. 現在每份都是1/6，可以把份數相加：3/6 + 2/6 = 5/6。
5. 因此1/2 + 1/3 = 5/6。

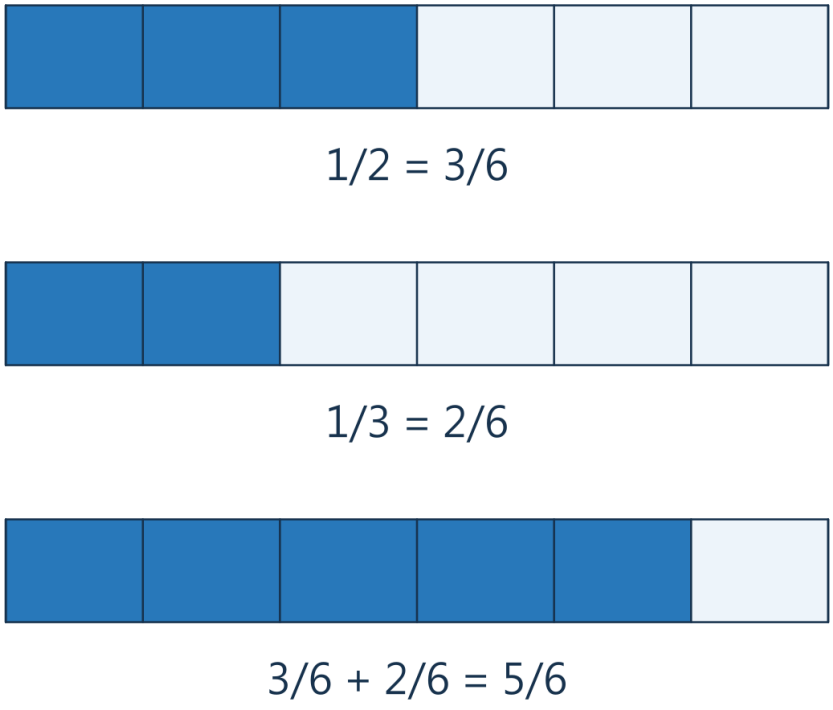


圖11 | 三條等長長條分別表示3/6、2/6與5/6，把前兩種同樣大小的份合併得到5/6。

檢查：5/6 − 1/3 = 5/6 − 2/6 = 3/6 = 1/2，能回到第一個加數。

若錯寫成(1 + 1)/(2 + 3) = 2/5，連結果大小都不合理：把正的1/3加到1/2上，結果應大於1/2，而2/5卻小於1/2。

6.2 減法與負分數

5/6 − 1/4可以先通分成10/12 − 3/12，得到7/12。若順序反過來，1/4 − 5/6 = 3/12 − 10/12 = −7/12。

分數的減法也保留方向，不是永遠取「較大分子減較小分子」。負分數在數線上位於0左側，與第4章的整數方向一致。

6.3 乘法是部分中的部分

乘上一個小於1的正分數，可以表示取原有數量的一部分。這與乘正整數時「有幾組」的情境不同，但運算關係能一致地延伸。

例題2 求2/3的3/4

1. 先把一個單位矩形分成3欄，取其中2欄，表示2/3。
2. 再把每欄沿另一方向等分成4列。
3. 每個小格是整體的1/12；在原有2欄裡取其中3列，共取到2 × 3 = 6格。
4. 所以(2/3) × (3/4) = 6/12 = 1/2。

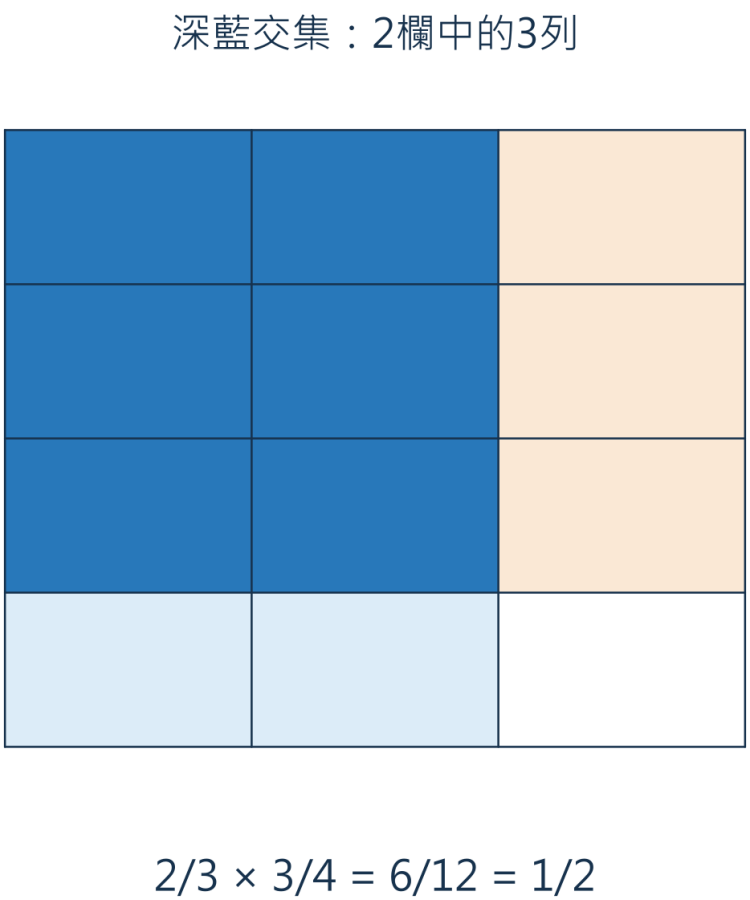


圖12 | 矩形分成3欄4列，取2欄中的3列，交集有6格，共12格，表示乘積1/2。

這給出分子相乘、分母相乘的數量解釋。對有正負號的有理數，再保留已學的符號規則。例如(−2/3) × (3/4) = −1/2。

檢查：原數2/3取其中3/4，應比原數小且大於0。結果1/2符合這個大小範圍。

6.4 分數除法要保留除數非零

一個非零分數的倒數，是與它相乘得到1的數。例如2/5的倒數是5/2，因為(2/5) × (5/2) = 1。

0沒有這裡的倒數，因為0乘任何通常的有理數仍是0，不會等於1。

例題3 計算(3/4) ÷ (2/5)

1. 除數2/5不為0，有倒數5/2，而且(2/5) × (5/2) = 1。
2. 把有理數的商記作q，它必須滿足q × (2/5) = 3/4。
3. 把等式兩邊同乘5/2，得到[q × (2/5)] × (5/2) = (3/4) × (5/2)。
4. 相乘的三個因數可重新分組而不改乘積，這叫乘法的結合律。左邊可寫成q × [(2/5) × (5/2)] = q × 1 = q，因此任何合格的商都必須等於(3/4) × (5/2)。
5. 計算右邊，得到(3 × 5)/(4 × 2) = 15/8。
6. 回查：(15/8) × (2/5) = 30/40 = 3/4，確實符合商的乘法條件。
7. 任何合格商都必須是15/8，而15/8也確實合格，所以(3/4) ÷ (2/5) = 15/8，也就是1 + 7/8。

「除以非零分數，等於乘它的倒數」不是把所有分數都翻過來。只對作為除數的那個非零分數取倒數，原來的被除數3/4保持不變。

當除數是正而小於1的數，商可能比被除數大。例如本題15/8 > 3/4，這並不違反除法的意義。

6.5 約分只能消去共同因數

在(2 × 3)/(5 × 3)裡，3是分子、分母的共同因數，所以能同除以3，得到2/5。

但在(2 + 3)/3裡，分子是一個和，不是整個分子都乘了3。不能只劃掉其中的3，寫成2 + 1。原式是5/3；若逐項分開除，應寫2/3 + 3/3 = 2/3 + 1。

分數混合運算仍使用括號與四則次序。先確定整個分子、分母或除數的範圍，再進行變形。

6.6 練習

1 **B01-C06-Q01**：計算1/4 + 1/6，說明共同分母。

2 **B01-C06-Q02**：計算5/6 – 1/4。

3 **B01-C06-Q03**：計算(3/5) × (10/9)，並約成最簡分數。

4 **B01-C06-Q04**：計算(2/3) ÷ (4/5)，並用乘法檢查。

5 **B01-C06-Q05**：計算(–1/2) + 3/4。

6 **B01-C06-Q06**：計算1/2 + (1/3) × (3/4)。

7 **B01-C06-Q07**：0 ÷ (3/5)與(3/5) ÷ 0，哪個有通常的值？

8 **B01-C06-Q08**：有人把(2 + 3)/3約成2 + 1。指出錯誤並寫出正確值。

6.7 完整解答

Q01

採共同分母12，1/4 = 3/12，1/6 = 2/12。因此1/4 + 1/6 = 5/12。兩個原分母都非零，通分保持原值。

Q02

採共同分母12，5/6 = 10/12，1/4 = 3/12，因此差是7/12。回查7/12 + 1/4 = 7/12 + 3/12 = 10/12 = 5/6。

Q03

(3/5) × (10/9) = 30/45。分子與分母同除以15，得到2/3。也可先把共同因數3與5分別約去，再相乘，但每一步都必須是在分子、分母之間消去共同因數。

Q04

除數4/5不為0，乘它的倒數5/4，得到(2/3) × (5/4) = 10/12 = 5/6。檢查(5/6) × (4/5) = 20/30 = 2/3，與被除數一致。

第6章 完整解答（續）

Q05

把−1/2寫成−2/4，再加3/4，得到1/4。不能只看兩個分子的大小而忽略原來的負號。

Q06

先算乘法：(1/3) × (3/4) = 3/12 = 1/4。再算1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4。

Q07

0 ÷ (3/5) = 0，因為除數3/5不為0，且0 × (3/5) = 0。但(3/5) ÷ 0涉及除以0，在通常有理數四則中不定義。兩個式子的0出現在不同位置，資格不同。

Q08

分子2 + 3是一個和，不能只把其中的3與分母消去。先合併分子得到5/3；或者逐項除以3，得到2/3 + 1，兩者相同。錯誤答案2 + 1 = 3並不等於5/3。

6.8 本章回顧

加減先統一份的大小，乘法可以看成部分中的部分，除法則檢查非零除數並用乘法回查。約分保留共同因數的結構，不能跨越加減號任意劃掉項。下一章把分數轉成十進位小數與百分率，並明確處理近似。

第7章 小數、百分率與近似

小數與百分率不只是換一個符號。小數沿用十進位的位值規則，百分率則把比較的基準改寫成每100份。當答案只能保留有限位數，還要分清精確值與近似值。

本章讀完，你應能互換基本分數、小數及百分率，找出百分率對應的基準量，並說明非負數四捨五入的誤差。

7.1 小數點右側的位置

小數點右側依序是十分位、百分位、千分位。每往右一位，單位變成前一位的十分之一。

小數位	每一單位表示	例子
十分位	1/10	0.3 = 3/10
百分位	1/100	0.07 = 7/100
千分位	1/1000	0.005 = 5/1000

0.30 = 30/100 = 3/10 = 0.3。這裡刪去末尾的0沒有改變其他數字的位值；與4052中間的0不能刪，是不同的情況。

例題1 把0.375改成分數

1. 0.375 = 3/10 + 7/100 + 5/1000。
2. 通分到千分之一，得到300/1000 + 70/1000 + 5/1000 = 375/1000。
3. 分子、分母同除以125，得到3/8。
4. 所以0.375 = 3/8，這是精確相等，不是近似。

0.375 = 3/8



8等份中取3份

0.3 + 0.07 + 0.005 = 0.375

圖13 | 同一長條八等分取三份，表示3/8；下方對照0.3加0.07加0.005等於0.375。

檢查：3 ÷ 8 = 0.375，而0.375 × 8 = 3，能回到原分子。

7.2 有限位數不一定寫得完

有些分數能用有限小數精確表示，有些不能。例如1/3 = 0.333……，其中省略號表示3無限重複，不是只寫出有限的幾個3。

若只取0.333，它精確等於333/1000，與1/3不同。兩者的差為1/3 − 333/1000 = 1/3000，是正數。因此可以寫1/3 ≈ 0.333，不能在沒有省略號的情況下把兩者寫成精確相等。

「≈」提醒讀者我們正在使用近似值。近似到哪一位、用什麼規則、容許多少誤差，都應在需要時說清楚。

7.3 百分率先找基準量

15%表示15/100，也就是0.15。它本身是一個比值；要得到實際數量，還需知道「哪個基準量的15%」。

例題2 240個物件的15%是多少

1. 基準量是240個，不是15個或100個。
2. 15% = 15/100。
3. 所求數量為240 × 15/100。
4. 先算240 × 15 = 3600，再除以100，得到36。
5. 因此答案是36個物件。

另一種檢查：10%是24個，5%是12個，合起來15%是24 + 12 = 36個。

若題目改成「36佔240的百分之幾」，方向不同，應先算36/240 = 0.15，再寫成15%。

百分率的改變也要保留基準。由100降到80是減少20%；由80回到100則增加20/80 = 25%，不是增加20%。兩次計算的分母不同。

7.4 四捨五入先指定保留到哪裡

本章的四捨五入只討論非負數，採常用的「下一位小於5捨去，5或大於5進位」規則。其他情境可能使用不同的平手規則，不能只看到「取近似」就假設一律相同。

例題3 把12.746保留到小數點後兩位

1. 保留兩位就是保留到百分位，先看12.74後面的下一位。
2. 千分位是6，大於或等於5，因此百分位的4進成5。
3. 得到近似值12.75，寫成12.746 ≈ 12.75。

4 近似值比原值大12.75 − 12.746 = 0.004。

5 保留到0.01這一格時，最近格點距離不超過半格0.005，本題0.004符合這個誤差範圍。

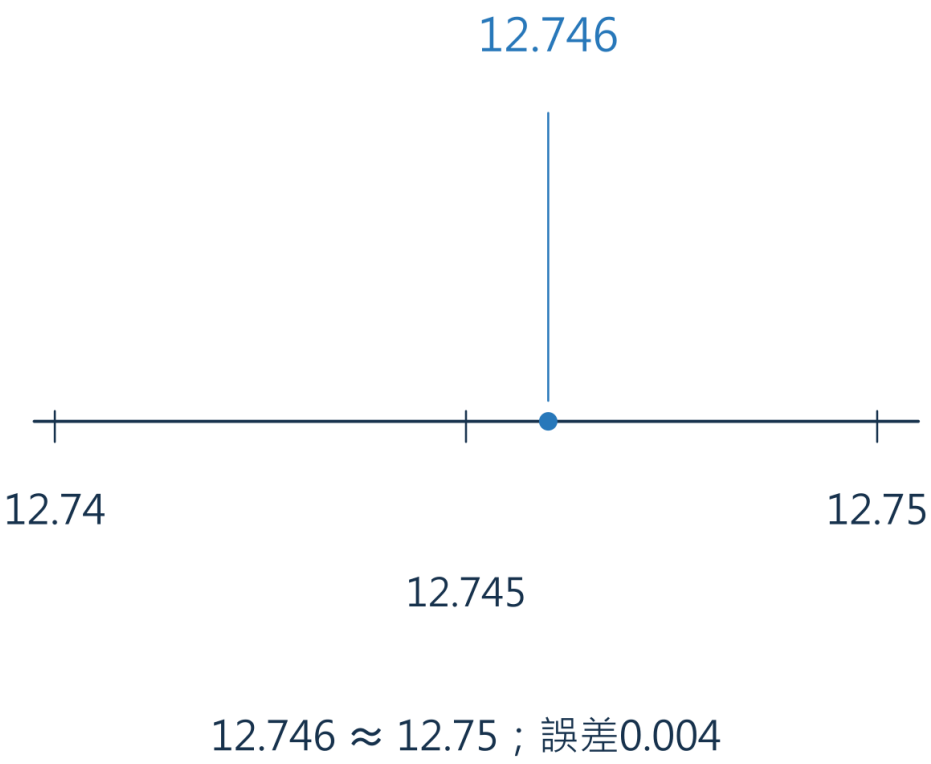


圖14 | 數線上12.746位於12.745右側，比較接近12.75而非12.74，依本章規則取12.75。

這不是精確等式12.746 = 12.75。若下一步需要更高精度，應盡量保留原始值，在最後需要呈現時再取近似，避免誤差累積。

7.5 常見錯誤

- 以為小數位數較多就一定較大。比較0.4與0.35時，應把0.4看成0.40，因此0.4較大。
- 把15%直接當成15倍，忘了它代表15/100。

- 算百分率卻沒有寫出分母對應的基準量。
- 把截取幾位、四捨五入與精確相等混為一談。

7.6 練習

1 **B01-C07-Q01**：把0.125改成最簡分數。

2 **B01-C07-Q02**：把3/5改成小數和百分率。

3 **B01-C07-Q03**：80個物件的25%是多少？

4 **B01-C07-Q04**：18佔60的百分之幾？

5 **B01-C07-Q05**：依本章規則，把2.345保留到小數點後兩位。

6 **B01-C07-Q06**：把9.96保留到小數點後一位，注意進位。

7 **B01-C07-Q07**：比較0.4和0.35，並說明位值。

8 **B01-C07-Q08**：只寫0.333與寫0.333……，兩者都能與1/3用精確等號連接嗎？

7.7 完整解答

Q01

0.125 = 125/1000，分子、分母同除以125，得到1/8。這是有限小數與分數的精確相等。

Q02

3/5 = 6/10 = 0.6。再改成以100為分母，得到60/100，所以百分率是60%。三個表示法是同一個比值。

Q03

25% = 25/100 = 1/4，因此80 × 1/4 = 20，答案是20個物件。基準量是80。

Q04

所求比值是18/60 = 3/10 = 0.3，所以是30%。這裡60是基準量，不能把分母與分子顛倒。

第7章 完整解答（續）

Q05

保留到百分位，下一位千分位是5，按本章的平手規則向上進位，因此2.345 ≈ 2.35。結果是近似值，不把2.345與2.35寫成精確相等。

Q06

保留到十分位，下一位是6，所以十分位的9進位。9.9加上0.1得到10.0，因此9.96 ≈ 10.0；末尾的0在這裡也表達了保留到十分位的呈現精度。

Q07

0.4 = 0.40，而40個百分之一比35個百分之一大，所以0.4 > 0.35。不能只比小數點後的「4」與「35」兩個整數。

Q08

不能把兩者都當成精確相等。0.333是333/1000，與1/3差1/3000；0.333……若明確表示3無限重複，才是1/3的精確小數表示。有限近似應用「≈」。

7.8 本章回顧

小數、分數與百分率可以表示同一個數，但百分率應明示基準量，有限小數也可能只是近似。下一章會把比例、變化率與單位換算放在一起處理，檢查算式裡每個數量的角色。

第8章 比、比例與單位

「甲有2份、乙有3份」可以寫成甲與乙的比為2:3。但甲佔總量的份額不是2/3，而是2/(2 + 3)。只差一句話，分母所指的基準就變了。

本章讀完，你應能分清部分比部分與部分比整體，使用比例求量，並在單位一致的前提下處理速率與比例尺。

8.1 先說清楚比的是誰

同類量的比，可以在統一單位後比較。例如2公尺比3公尺是2:3；若寫200公分比3公尺，必須先換成相同單位，不能直接讀成200:3。

比的次序也有意義。甲比乙是2:3，不表示乙比甲也為2:3；反過來應是3:2。

同一個比的兩項同乘或同除合格的非零數，可得到等值比。用非負數量分組時，本章採正倍率，並保留實際單位和數量限制。

例題1 甲、乙兩種飲料按2:3配成25公升

1. 甲與乙合起來共有2 + 3 = 5份。
2. 總量25公升分成5等份，每份是25 ÷ 5 = 5公升。
3. 甲有2份，所以甲的體積是2 × 5 = 10公升。
4. 乙有3份，所以乙的體積是3 × 5 = 15公升。
5. 檢查總量：10 + 15 = 25；檢查比值：10:15約成2:3。

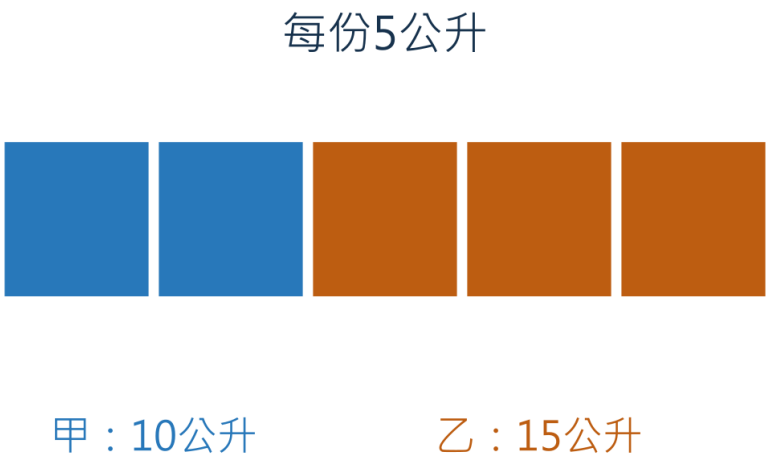


圖15 | 一條總量25公升的長條分成5等份，甲取2份為10公升，乙取3份為15公升。

在這個模型裡，我們假定體積可直接相加。實際混合情況若不符合這個模型，要改用適當的條件，不能只因算式正確就忽略假設。

甲佔總量的比值是10/25 = 2/5；甲比乙則是10/15 = 2/3。這兩個分數回答不同問題，沒有矛盾。

8.2 比例式與相同倍率

若a/b = c/d，且b、d都非零，把等式兩邊同乘bd，可得到ad = bc。這就是常見的交叉相乘；它依賴分母非零，而不是看見四個數就任意畫叉。

在具體比例題裡，也可先找每一份或共同倍率。例如□/5 = 12/15，因為12/15 = 4/5，所以方框是4。

若題目涉及物件個數，還要檢查結果是否符合整數要求；涉及長度或體積，則應保留相應單位。

8.3 速率是兩種量之間的比

速率會把不同單位連接起來，例如公里除以小時，得到公里 / 小時。它不是把兩個同類物件的個數比在一起。

例題2 150公里用了2.5小時

1. 平均速率按總路程除以總時間定義。
2. 150 ÷ 2.5 = 60，因此平均速率是60公里 / 小時。
3. 把時間換回檢查：2.5小時 × 60公里 / 小時 = 150公里。
4. 這只描述整段的平均，不表示每一瞬間都以60公里 / 小時移動。

   如果另有條件說接下來15分鐘維持這個速率，15分鐘是15/60 = 1/4小時，才可推得路程60 × 1/4 = 15公里。

   不能把15分鐘直接當成15小時，也不能在沒有恆定速率條件時，把平均值當成任意一小段的確切速率。

8.4 比例尺先保持同一單位

例題3 比例尺1:50000的圖上3公分

1. 比例尺1:50000表示圖上長度與模型中的地面長度之比，兩邊先用同一單位。
2. 圖上1公分對應50000公分；3公分對應3 × 50000 = 150000公分。
3. 每100公分是1公尺，所以150000公分 = 1500公尺。
4. 每1000公尺是1公里，所以1500公尺 = 1.5公里。

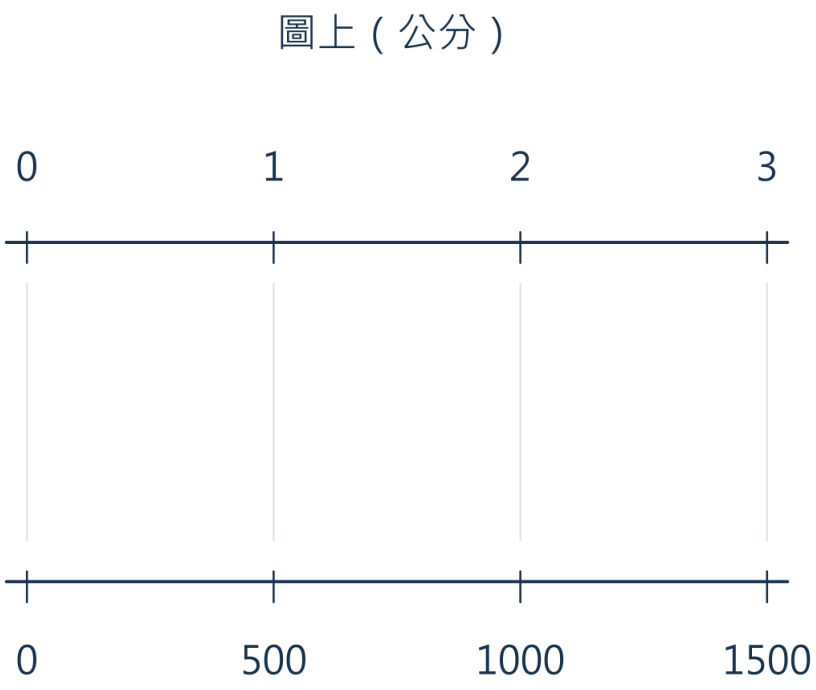


圖16 | 雙刻度對照：圖上0至3公分，對應地面模型0至1500公尺；兩條刻度使用相同比例位置。

回查：1.5公里 = 150000公分，再除以50000，得到圖上3公分。這是所用模型中的對應長度，不額外保證某條道路的實際行走距離。

8.5 面積單位不能只乘一次換算倍率

1平方公尺，寫作1 m²，是邊長1公尺的正方形面積。每邊1公尺都等於100公分，所以同一正方形以公分量邊，面積是100 × 100 = 10000平方公分。

因此1 m² = 10000 cm²，而不是100 cm²。兩個方向的長度都換了單位，面積的換算就要同時考慮兩個方向。數的平方會在下一章進一步討論。

同樣，遇到速率時要分別處理路程與時間。例如公分 / 秒改成公尺 / 秒，只改路程單位；若要再改成公尺 / 分鐘，時間單位也必須另行換算。

8.6 常見錯誤

- 把甲比乙的2:3，直接當成甲佔總量2/3。
- 沒先統一單位，就把2公尺和50公分當成2:50。
- 算出比例後，不檢查物件能否切分、結果是否必須為整數。
- 只記得長度換算倍率，把面積或速率的單位也直接照抄。

8.7 練習

1 **B01-C08-Q01**：甲與乙的量比為3:2，總量40，求甲與乙各是多少。

2 **B01-C08-Q02**：把4:6改成最簡整數比。

3 **B01-C08-Q03**：求□/5 = 12/15中的方框值。

4 **B01-C08-Q04**：2公尺35公分等於多少公分？

5 **B01-C08-Q05**：72公里用了1.5小時，平均速率是多少公里 / 小時？

6 **B01-C08-Q06**：1平方公尺等於多少平方公分？說明兩個方向的換算。

7 **B01-C08-Q07**：比例尺1:1000的圖上4公分，對應模型中的多少公尺？

8 **B01-C08-Q08**：甲與乙的比為2:3時，甲佔總量2/3嗎？說明正確比值。

8.8 完整解答

Q01

共有3 + 2 = 5份，每份40 ÷ 5 = 8。甲是3 × 8 = 24，乙是2 × 8 = 16。檢查24 + 16 = 40，且24:16約成3:2。

Q02

兩項同除以2，4:6 = 2:3。比值4/6與2/3相等，而不是只把其中一項改小。

Q03

12/15的分子、分母同除以3，得到4/5，因此方框是4。回查4 × 15 = 5 × 12 = 60。

Q04

2公尺是200公分，再加35公分，得到235公分。不能把2和35直接相加後寫成37公分，因為原來的單位不同。

第8章 完整解答（續）

Q05

平均速率是72 ÷ 1.5 = 48公里 / 小時。檢查48 × 1.5 = 72；這不額外指定任意時刻的瞬時速率。

Q06

邊長1公尺的正方形，每邊都是100公分，所以面積是100 × 100 = 10000平方公分。換算倍率出現兩次，因為面積涉及兩個長度方向。

Q07

先用公分：4 × 1000 = 4000公分。再除以100換成公尺，得到40公尺。

Q08

不是。甲2份、乙3份，總量是5份，所以甲佔總量2/5。2/3是甲與乙相比的比值，分母不是總量。

8.9 本章回顧

比、百分率與速率都需要先辨認比較對象和基準量。比例式要保留分母資格，數量要帶正確單位。下一章會把重複相乘整理成冪，再分清平方、平方根、絕對值和近似。

第9章 冪、平方根與實數初識

重複相加可以用乘法表示，重複相乘則可以用冪表示。但平方與平方根不是只看符號長得相反，就能任意互相消去；正負號、括號與所求對象仍然重要。

本章讀完，你應能解讀自然數指數，區分主平方根與方程式的解，並用明確的上下界說明平方根的近似值。

9.1 冪是在重複乘什麼

2^3表示3個2相乘：$2 \times 2 \times 2 = 8$。底數是2，指數是3；不是2乘3，也不是3個2相加。

對正整數n，a^n表示n個a相乘。本章採通常約定：當a不等於0時，$a^0 = 1$，讓乘上零次方不改變原有冪的乘法關係。本章不處理0^0；其他數學情境可能另有約定，不能只靠這裡的非零底數規則斷定它。

0的正整數次方則是0，因為重複乘積中包含0。本章先不討論負指數或複數平方根。

例題1 計算$2^3 \times 2^2$

1 2^3是3個2相乘，2^2是2個2相乘。

2 合在一起共有5個2相乘。

3 因此$2^3 \times 2^2 = 2^5$。

4 依次計算2、4、8、16、32，得到$2^5 = 32$。

這說明同底數冪相乘時，指數相加的來源；不是把底數也一起加起來。

有括號時，先看底數到底是什麼。$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$；但依通常運算記法，$-3^2$表示$-(3^2) = -9$。沒有括號時，冪先於前面的負號作用，兩個寫法不同。

9.2 平方可以連到面積

3²是3 × 3，可以用邊長3個長度單位的正方形表示，其面積為9個面積單位。邊長4的正方形則有4 × 4 = 16個面積單位。

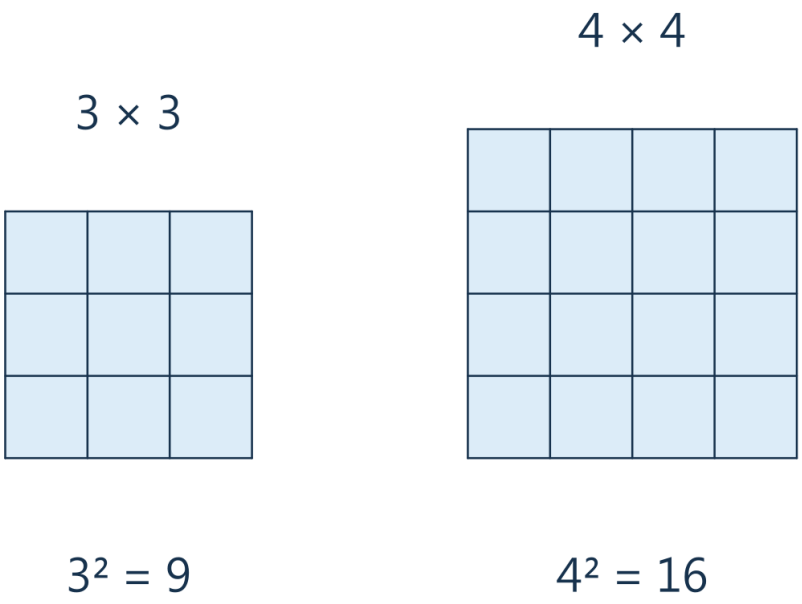


圖17 | 邊長3與4的正方形，分別以3乘3和4乘4的單位格表示9與16。

長度與面積的單位不同。邊長3公尺，面積是9平方公尺，不能寫成9公尺。對負數作平方時，負號屬於數的運算；不是把物理邊長畫成負長度。

9.3 主平方根只取非負的一個

若a是非負實數，√a表示平方後等於a的非負數，稱為主平方根。於是√9 = 3，而不是同時把3與−3都放進這一個函數值。

但如果問題是「哪些數的平方等於9」，3和−3都符合。根號所表示的一個值，與方程式可能有幾個解，是不同問題。

例題2 求√25，再解$x^2 = 25$

1. $5 \times 5 = 25$，且5不為負，所以$\sqrt{25} = 5$。
2. $(-5) \times (-5)$也等於25，因此−5同樣符合方程式$x^2 = 25$。
3. 方程式的兩個實數解是5與−5，但主平方根的值仍只有5。
4. 回查兩個候選值，各自代入平方，都會得到25。

還要排除其他解，不能只因試中兩個數就宣稱沒有別的。非負數越大，平方也越大，所以除5之外沒有另一個非負數平方為25。若x為負，正數−x的平方也必須是25，因而−x只能是5，x只能是−5。這才把兩種符號的實數情況都涵蓋。

同樣，$\sqrt{[(-6)^2]} = \sqrt{36} = 6$，不是−6。對實數a，平方後再取主平方根會得到$|a|$，因為主平方根保留非負值，不保留原來的負方向。

9.4 精確符號與有限近似

不是每個平方根都能在紙上寫成簡短的整數或有限小數。$\sqrt{2}$表示非負、平方等於2的數；若需要有限精度，可以保留精確符號，同時給出可檢查的近似範圍。

本冊在數線上使用這些實數作計算與比較；實數的嚴格完備性背景留到後續分析冊，不把小數算出幾位當成那套理論的證明。

例題3 用上下界近似√2

1. 先計算1.414^2，得到1.999396，小於2。
2. 再計算1.415^2，得到2.002225，大於2。
3. 這兩個候選數都是非負數；在非負數範圍內，平方會隨數值增加而增加。
4. 因此$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$。

5 若依第7章的規則保留到小數點後兩位，√2取近似值1.41；它還沒到會進成1.42的分界1.415。

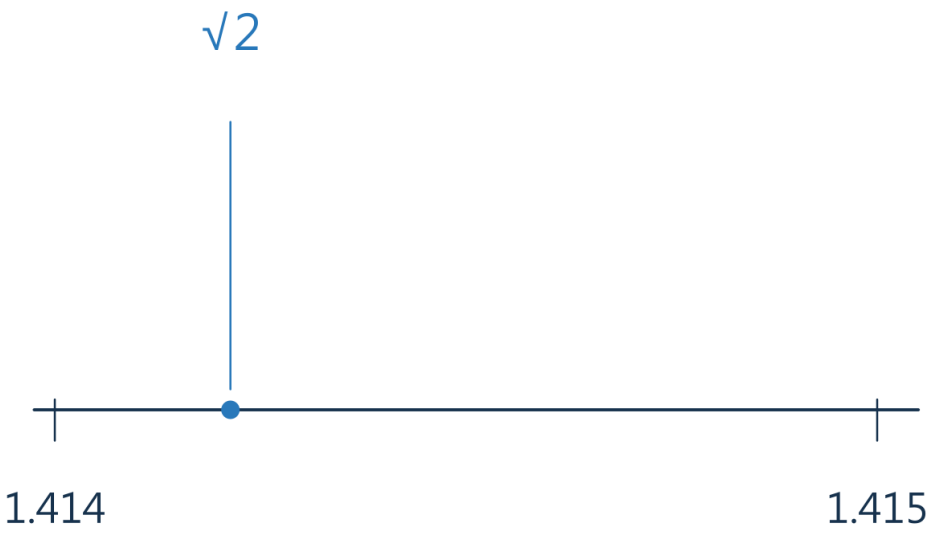


圖18 | 1.414與1.415夾住√2；標記強調這是區間控制，不是把根號值寫成有限小數的精確等式。

不能寫成√2 = 1.414，因為1.414的平方不等於2。多算幾位可以縮小近似誤差，但精確符號與有限近似的角色仍要分開。

9.5 平方不任意穿過加號

(2 + 3)²要先算括號得到5，再平方得到25。2² + 3²則是4 + 9 = 13，兩者不相等。

同樣，√9 + √16 = 3 + 4 = 7，而√(9 + 16) = √25 = 5。把分開的根號合成一個根號，並不是通常有效的加法規則。

這些數值反例足以推翻「對所有合格數都能任意這樣改寫」的說法，但不表示沒有任何特定數值會碰巧相同。反例要對準原命題的範圍。

9.6 練習

1 **B01-C09-Q01**：求3^4，寫出重複乘積。

2 **B01-C09-Q02**：比較$(-4)^2$與-4^2的值。

3 **B01-C09-Q03**：依本章約定，5^0是多少？這能直接決定0^0嗎？

4 **B01-C09-Q04**：求$\sqrt{81}$。

5 **B01-C09-Q05**：求$\sqrt{[(-6)^2]}$，注意主平方根。

6 **B01-C09-Q06**：解$x^2 = 16$，並與$\sqrt{16}$比較。

7 **B01-C09-Q07**：計算$(2 + 3)^2$與$2^2 + 3^2$，判斷能否直接去掉括號。

8 **B01-C09-Q08**：利用$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$，把$\sqrt{2}$依第7章規則保留到小數點後兩位。

9.7 完整解答

Q01

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$。前兩個3相乘得9，再乘3得27，再乘3得81，所以答案是81。

Q02

$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$；$-4^2$表示$-(4 \times 4) = -16$。括號決定負號是否包含在被平方的底數中。

Q03

5不為0，所以依本章約定$5^0 = 1$。這條規則有非零底數的條件，不能直接拿來決定本章未處理的0^0；要另外查明情境和約定。

Q04

$9^2 = 81$，且9是非負數，所以$\sqrt{81} = 9$。雖然-9平方也得到81，它不是主平方根的非負值。

第9章 完整解答（續）

Q05

先算$(-6)^2 = 36$，再取主平方根，得到$\sqrt{36} = 6$。結果也等於$|-6|$，不會回到原來的負數。

Q06

$4^2 = 16$，$(-4)^2 = 16$，所以4與−4都符合方程式。再依例題2的方法排除其他實數解：若$0 \le x < 4$，則$x^2 < 16$；若$x > 4$，則$x^2 > 16$。因此非負解只有4。若$x < 0$，非負數$-x$的平方也等於16，所以$-x = 4$，得到$x = -4$。這便涵蓋全部實數情況，實數解恰為4與−4。$\sqrt{16}$則只等於非負的4；不要把函數值寫成兩個數。

Q07

$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$；$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$。兩個結果不同，因此不能用分開平方直接取代括號內和的平方。

Q08

$\sqrt{2}$已大於1.414，但嚴格小於1.415。保留到百分位時，進成1.42的分界是1.415；本題尚未到分界，因此$\sqrt{2} \approx 1.41$。這是近似，不是精確等式。

9.8 本章回顧

冪記錄重複相乘，括號決定底數，主平方根則保留非負值。方程式的解與根號函數值要分開，近似數也不能冒充精確值。最後一章會把整數、分數、小數、比例與冪根整合成完整問題。

第10章 綜合應用與自我診斷

真實的題目不一定直接告訴你「這題用乘法」。同一個問題可能同時需要分數、單位換算、整數限制與驗算。最後一章要練習的是：先建立正確問題，再選擇計算方式。

本章讀完，你應能列出已知量、單位、限制與目標，完成逐步計算，並把錯誤記錄成可修正的具體原因，而不是只留下對或錯。

10.1 先分清目標與條件

開始計算前，先用一句話寫出要求什麼。再列出題目真的提供了哪些資訊，以及哪些額外假設是你使用模型時需要的。

例如「需要18公升」與「每瓶2.5公升」還沒有直接說能買幾分之幾瓶。若只能買整瓶，答案就必須符合整數限制；若可以分裝購買，問題則不同。

把單位與資格寫在數字旁邊，可以及早發現把公分當公尺、把人數當公升、或把比例的一項誤當總量的錯誤。

例題1 活動飲料要準備幾瓶

問題：24人每人需要3/4公升飲料，每瓶容量2.5公升，只能準備整瓶。至少要幾瓶？按題目需求分完後還剩多少公升？這裡不計灑漏，也假設容量可直接相加。

1 先求總需求：24 × 3/4 = 18公升。

2 若只計體積比值，18 ÷ 2.5 = 7.2，但瓶數必須是非負整數。

3 7瓶只有7 × 2.5 = 17.5公升，不足18公升。

4 8瓶有8 × 2.5 = 20公升，已足夠。容量為正，少於7瓶只會更少，所以最少是8瓶。

5 分出18公升後，剩20 − 18 = 2公升。

回查：18公升除以24人，得到每人3/4公升；已準備的20公升減去需求18公升，回到剩餘2公升。

這裡選8瓶不是把7.2四捨五入。它是在找最小的、能滿足供給要求的整數；若四捨五入成7，反而不符合題意。

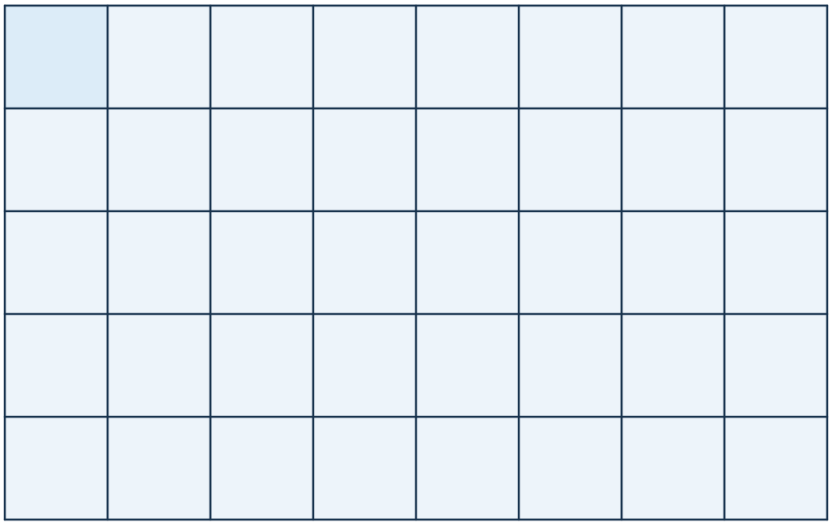
10.2 用另一條路檢查數量

例題2 長方形區域鋪方磚

問題：一個長2.4公尺、寬1.5公尺的長方形區域，使用邊長0.3公尺的正方形磚，沿長寬方向整齊排列，不留縫、不切割。需要幾片？若每箱12片且只能買整箱，最少幾箱，會剩幾片？

1. 長向可排2.4 ÷ 0.3 = 8片。
2. 寬向可排1.5 ÷ 0.3 = 5片。
3. 兩個方向都剛好是整數片，所以這種排列確實可行。
4. 總片數是8 × 5 = 40片。
5. 3箱只有36片，不足；4箱有48片，足夠。因此最少4箱，剩48 − 40 = 8片。

8片 × 5片 = 40片



長2.4m，寬1.5m

每片邊長0.3m

圖19 | 長方形按同一長度比例畫出8欄5列的方磚網格，共40格，每格對應邊長0.3公尺的正方形。

另用面積檢查：區域面積是2.4 × 1.5 = 3.6平方公尺；每片面積0.3 × 0.3 = 0.09平方公尺。3.6 ÷ 0.09 = 40，與排數相乘一致。

只算面積比值，並不能對任意形狀保證都能不切割地鋪滿。本題另檢查了兩個邊長都是0.3的整數倍，才把面積計算與具體排列接起來。

10.3 診斷錯誤要找到哪一步失去理由

例題3 檢查一段錯誤的分數運算

問題：計算−3 + 2 × (1/2 + 1/4)。有人先把括號寫成2/6 = 1/3，又把−3與2先合併，得到−1/3。請檢查。

1 第一個錯誤是直接把分子、分母分別相加。應先通分：1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4。

2 第二個錯誤是改變運算分組。原式的2要先乘括號，不能先與−3相加。

3 正確下一步是−3 + 2 × (3/4)。

4 先算乘法2 × 3/4 = 3/2，再算−3 + 3/2 = −6/2 + 3/2 = −3/2。

5 因此答案是−3/2，也可以寫成−1.5。

回查這條計算鏈：−3/2加回3，得到3/2；再除以非零的2，得到3/4；再減1/2，回到括號中另一項1/4。每一步都要注意運算方向與除數資格，不能只說「反過來看好像對」。

10.4 可重複使用的解題檢查



圖20 | 五個步驟由上到下：確認條件、建立模型、逐步計算、回查結果、記錄錯因；這是有限檢查流程，不是要求無限推導。

1. **條件**：已知量、單位、論域、非零條件與整數限制是什麼？
2. **模型**：算式真的表達題意嗎？分母、百分率和比例的基準量對不對？
3. **計算**：括號、符號、通分、約分與近似規則各有沒有理由？
4. **回查**：回代、反向運算、另一種表示或大小估計，能否與原條件接起來？
5. **錯因**：如果結果不一致，是讀題、概念、運算、單位還是呈現出了問題？

回查能幫助確認這次計算，但一個數值例子不能代替一般命題的證明。反過來，一次做錯也不足以判定一個人的整體數學能力；先記下具體錯誤，再看是否能理解並修正。

10.5 練習

1. **B01-C10-Q01**：18人每人需要2/3公升飲料，總共需要多少公升？
2. **B01-C10-Q02**：承上題，每瓶2.5公升且只能準備整瓶，至少幾瓶？按需求分完後剩多少公升？
3. **B01-C10-Q03**：長1.8公尺、寬1.2公尺的長方形，沿長寬方向鋪邊長0.3公尺的方磚，不留縫、不切割，需要幾片？
4. **B01-C10-Q04**：一個合成價格模型從80元先降低25%，再按降後價格提高25%。結果會回到80元嗎？
5. **B01-C10-Q05**：計算7/8 − (1/4 + 1/8)，並用加法檢查。
6. **B01-C10-Q06**：計算−4 + 3 × 2，指出運算次序。
7. **B01-C10-Q07**：計算√49 + 2^3，說明根號與冪的值。
8. **B01-C10-Q08**：有人寫2/5 + 1/3 = 3/8。請指出錯因，寫出正確推導。

10.6 完整解答

Q01

總需求是18 × 2/3 = 12公升。檢查12 ÷ 18 = 2/3公升 / 人，與每人的需求相符。

Q02

4瓶只有4 × 2.5 = 10公升，不足12；5瓶有12.5公升，足夠，所以至少5瓶。剩餘12.5 − 12 = 0.5公升。不能把12 ÷ 2.5 = 4.8直接當成整瓶數。

Q03

長向1.8 ÷ 0.3 = 6片，寬向1.2 ÷ 0.3 = 4片，兩個方向都能整齊排列。總片數6 × 4 = 24片。面積核對：1.8 × 1.2 = 2.16，2.16 ÷ 0.09 = 24。

Q04

先降低80 × 25% = 20元，得到60元。再提高的是60的25%，即15元，得到75元，不是80元。第二次的基準量已改變，所以相同百分率不會自動互相抵消。

第10章 完整解答（續）

Q05

先算括號：1/4 + 1/8 = 2/8 + 1/8 = 3/8。再算7/8 − 3/8 = 4/8 = 1/2。檢查1/2 + 3/8 = 4/8 + 3/8 = 7/8。

Q06

先乘法3 × 2 = 6，再算−4 + 6 = 2。若先把−4與3合併，便改變了原式的分組，不能作為合法下一步。

Q07

√49取非負主平方根，是7；2^3是2 × 2 × 2 = 8。因此總和7 + 8 = 15。

Q08

錯在沒有先統一每份大小，直接把分子和分母相加。採共同分母15，2/5 = 6/15，1/3 = 5/15，因此和是11/15。減去5/15後得到6/15 = 2/5，可回查第一個加數。

10.7 本冊回顧與後續學習

本冊從位值與表徵開始，建立整數、分數、小數、百分率、比例及基本冪根的運算。你現在可以用相同數量的不同表示法解題，也可以把每一步接回原來的條件。

若要繼續，可進入第二冊的變數與方程，或第三冊的幾何測量。遇到不熟的部分，先回到對應章節的完整例題，再做同型練習；不要只以記住最後一個數字取代理解。