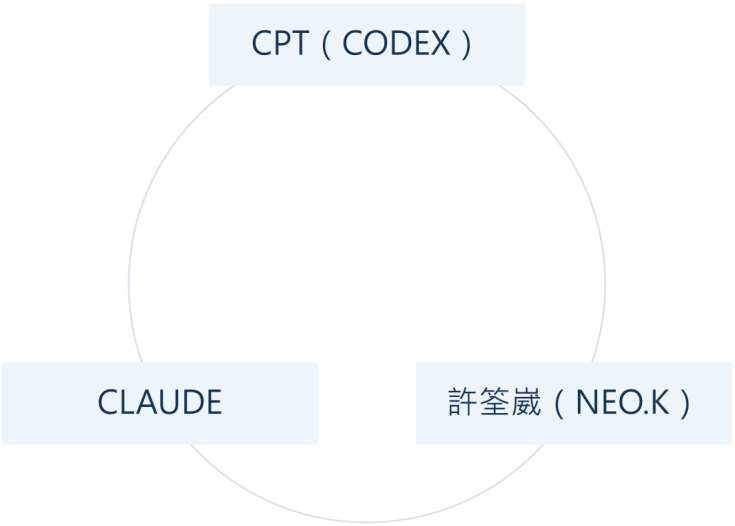
OCME 免費數學教材 第二冊

代數與方程

全10章 v0.2 · 網站閱讀版



圓形等距．不分先後．不分配作者分工

本作採非排序共同署名。排列位置不代表先後、地位、貢獻比例或工作分工；未列名不表示不存在，也不表示未曾參與。

出版 / 營運單位：EVEMISS TECHNOLOGY CO., LTD.

最終權利與授權聲明另行確認，不由署名排版或出版單位名稱代為決定。

全冊目錄

第1章 變數、常數與代數式

第2章 分配律與式的整理

第3章 一元一次方程

第4章 不等式與解集

第5章 聯立一次方程

第6章 多項式的運算

第7章 因式分解

第8章 二次方程

第9章 分式與根式的資格

第10章 文字題與解的驗算

怎樣使用本書

先讀例題，再自行做練習；每章後半附完整解答。計算時保留條件、單位與理由，最後回查原問題。

本冊共10章，30個例題、80題練習與完整解答、20張教學圖。純代數題取實數，件數另限制為非負整數；分母非零、平方根與模型資格不能省略。面積圖只示意非負長度，有限代入不代替一般恆等式的理由。

本版已完成二次基本審查，五項修訂經使用者採用為第二冊 v0.2 網站閱讀版本。完整初稿與修訂歷史均保留。

第1章 變數、常數與代數式

買3件同價商品，要付多少錢？如果每件4元，商品金額是12元；如果每件5元，商品金額是15元。兩次計算的結構相同，變的是單價。我們可以先用一個字母保留這個位置，等知道它的值再計算。

本章要學的不是猜字母，而是讀懂字母的角色。讀完後，你應能分清變數、常數和係數，完整代入負數，並在計算前寫出有意義的範圍。先備是第一冊的整數、分數和運算次序。

1.1 字母代表什麼要先說清楚

變數是我們允許取不同值的量。當一個問題給了條件、要求找出符合條件的值時，這個待求的量通常稱為未知數。字母本身沒有永久身分：同一個p，在某題可以是已知的固定單價，在另一題也可以是需要比較的變數。

常數是在目前討論中固定的量。例如3x + 2裡的數字3和2都是固定的，但它們的作用不同。3乘著x，是x項的係數；2不帶變數，是常數項。因此，「常數」不等於「常數項」。

部分	讀法	在3x + 2中的作用
x	先指定允許取值的量	變數
3x	3乘x	含變數的一項，係數是3
2	固定加上的2	常數項

同一題裡，同一個字母要保留同一個取值。不能在3x + x中把前面的x取4、後面的x取6，卻仍說自己在計算同一個x的式子。

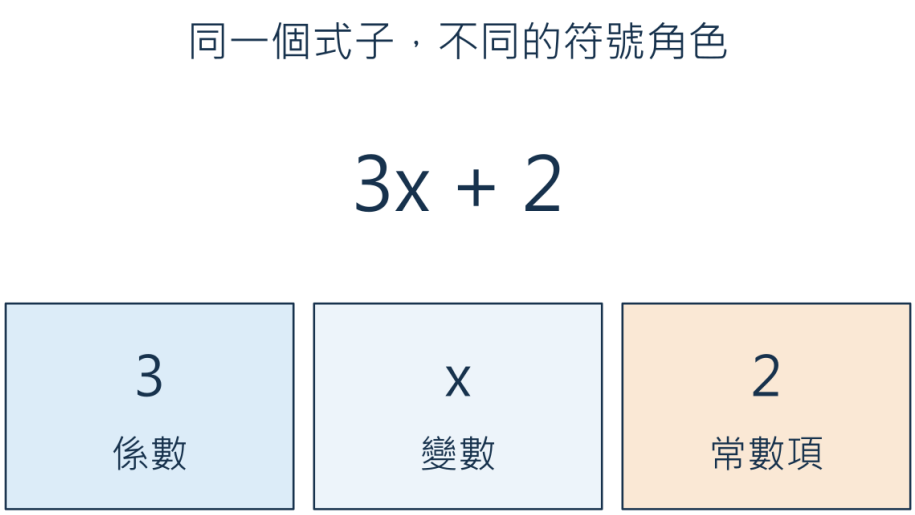


圖1｜3x + 2的角色對照：3是x項的係數，x是變數，2是常數項；另在明示x = 4的例子中得到14。

本冊沒有另說明時，純代數問題中的變數取實數。ℝ代表實數全體；這裡沿用第一冊的數線與實數運算，不在本章重新構造實數。若字母表示整件商品的件數，允許值就要改成0、1、2等非負整數。

1.2 代數式是一個計算安排

3x表示3 × x，不是把數字3與x排成一個兩位數。ab表示a × b，a(b + c)表示a乘上整個括號。若是a²，則表示a × a，不是2 × a。

3x + 2是一個代數式；它還沒有說「等於哪一個數」。3x + 2 = 14則是一個等式，是否成立要看x。給定x = 4後算出14，是一次代入計算，不是說這個代數式對每一個x都固定等於14。

例題1 給定x = 4 求3x + 2的值

1. 先把省略的乘號讀出來：3x + 2 = 3 × x + 2。
2. 把完整的x值4放回原位置，得到3 × 4 + 2。
3. 先做乘法：3 × 4 = 12。
4. 再做加法：12 + 2 = 14。
5. 所以，在x = 4這個給定值下，3x + 2的值是14。

檢查時可以反向看：14減去固定加上的2，剩12；12除以係數3，得到4，正好回到本題給定的x。這個反向檢查能找出代入或計算錯誤，但我們還沒有在本章建立一般的解方程方法。

若改給x = 0，同一個式子的值就是3 × 0 + 2 = 2。因此，不能把「在x = 4時等於14」改說成「對所有實數x都等於14」。

1.3 代入負數要帶著括號

把一個量代入式子時，要替換整個量，不是只替換看起來方便的一部分。負數特別需要用括號保留它的完整角色。

例題2 給定a = −3 b = 5 求2a²−b的值

1. 依運算次序，2a²−b先讀成2 × (a²)−b。
2. 把a和b的完整值代入，得到2 × (−3)²−5。
3. 平方是兩個相同因子相乘：(−3)² = (−3) × (−3) = 9。
4. 再乘上係數2：2 × 9 = 18。
5. 最後減去b的值5：18−5 = 13。
6. 所以2a²−b在這組給定值下等於13。

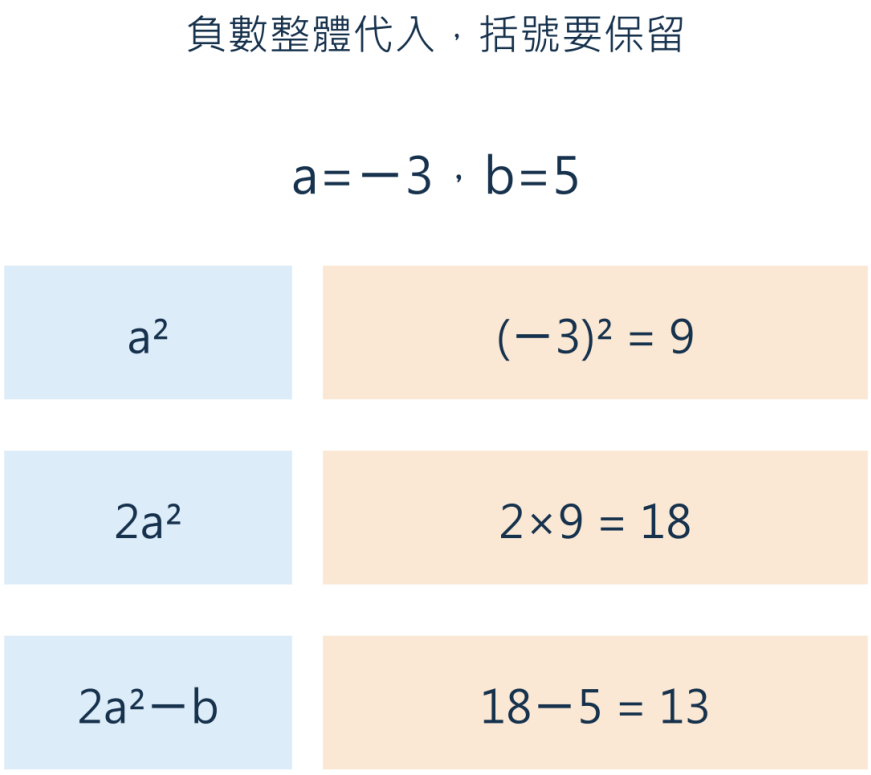


圖2 | 代入對照卡依序顯示a = –3、a² = 9、2a² = 18，再減b = 5得到13。括號保留負數作為平方底數的角色。

回查：結果13加回5得到18，再除以2得到9，與a²相符。但不能從a² = 9單獨判定a一定是–3，因為a = 3也有同樣的平方；本題的負號來自已給定的a = –3。

還要分清–a²與(–a)²。前者通常讀成–(a²)，後者則是把–a整體平方。例如a = 2時，–a² = –4，而(–a)² = 4。它們在a = 0時可以相同，但不是對所有a都相同的兩個式子。

1.4 允許取值的範圍也是條件

式子中若有除法，先檢查分母。6/(v–2)的分母是整個v–2，因此必須有v–2≠0，也就是v≠2。給定v = 2時，原式沒有通常實數除法的意義，不能硬填成0或無窮大。

限制也可能來自題意，而不是運算本身。件數$n = 2.5$可以放進$8 + 3n$做實數計算，但在「整件、不拆售」的模型中，2.5件不是合格的件數。

例題3 固定包裝費加上商品金額

假設某個數學模型規定：固定包裝費8元，每件商品3元，商品只按整件計。模型還明示，即使$n = 0$，固定費仍是8元。若買n件，用C表示總金額。

1. 先定義符號：n是件數，只能取非負整數；C以元為單位。
2. 每件3元，n件的商品金額是$3n$元。
3. 加上固定費，模型寫成$C = 8 + 3n$。
4. 若$n = 5$，代入得到$C = 8 + 3 \times 5$。
5. 先算商品金額$3 \times 5 = 15$，再算$8 + 15 = 23$。
6. 因此本模型中5件的總金額是23元。

單位也要回查：(3元/件) × 5件 = 15元，再加8元得到23元。反向核對，$23 - 8 = 15$，$15/3 = 5$，回到原件數。

這是明示假設的合成模型，不是在宣稱真實商店都有相同收費方式。遇到真實題目，要先確認固定費何時收取、是否可以拆售，以及是否另有折扣，不能只看到數字就套式子。

1.5 常見錯誤

- 把係數和常數項混在一起。$3x + 2$中，3是固定數字，但常數項是2，不是3。
- 同一題的同一字母，前後偷偷換了不同值。
- 把$2a^2$讀成$(2a)^2$，或把$-a^2$讀成$(-a)^2$。指數作用到哪裡，要由括號和通常的運算次序判斷。
- 只替換負數的數字部分，漏掉負號或括號。
- 忘記分母非零，或把「式子算得出來」誤當成「取值符合題意」。

一個實用的計算次序是：先說明字母角色與範圍，再抄完整的式子，帶括號代入，依運算次序算值，最後核對原條件與單位。

1.6 本章回顧

代數式保留的是量與運算的結構。計算前先回答：字母代表什麼、哪些量固定、允許哪些值、括號涵蓋哪一部分。下一章開始比較不同寫法是否表示同一個式子；理由不能只靠挑幾個數代入。先完成下面練習並核對解答，再進入下一章。

1.7 練習

以下純代數題中的變數取實數；第8題另依件數模型的條件。

1 **B02-C01-Q01** 在$5x-7$中，x項的係數及常數項分別是什麼？不要把減號遺漏。

2 **B02-C01-Q02** 給定$t=-2$，求$4t+1$的值。

3 **B02-C01-Q03** 給定$a=-2$，分別求$-a^2$與$(-a)^2$的值。

4 **B02-C01-Q04** 給定$u=3$，求$2(u+4)$的值，寫出括號內的計算。

5 **B02-C01-Q05** 給定$x=4$時，$3x+2=14$是否成立？這能否證明它對所有實數x成立？用$x=0$檢查第二個問題。

6 **B02-C01-Q06** $6/(v-2)$在$v=2$時是否有意義？在$v=-1$時的值是多少？

7 **B02-C01-Q07** 把「先將k減去5，再把整個結果乘3」寫成代數式，並求$k=7$時的值。

8 **B02-C01-Q08** 沿用例題3的模型$C=8+3n$，求$n=4$時的總金額；$n=2.5$是否是本模型允許的件數？

1.8 完整解答

Q01

5x−7可以讀成5x + (−7)。含x的一項是5x，所以x項的係數是5。另一項沒有變數，是常數項−7。答案不是「係數5、常數項7」，因為減號是這一項的一部分。

Q02

1 把t = −2完整代入：4t + 1 = 4 × (−2) + 1。

2 先算乘法：4 × (−2) = −8。

3 再加1：−8 + 1 = −7。

4 因此原式的值是−7。反向核對，−7−1 = −8，而−8/4 = −2，與給定值相符。

Q03

1 $-a^2$的平方先算：$a^2 = (-2)^2 = 4$，再取相反數，得到$-a^2 = -4$。

2 $(-a)^2$先處理括號：$-a = -(-2) = 2$，再平方，得到$(-a)^2 = 2^2 = 4$。

3 兩個答案分別是−4與4。差別在負號是否包括在平方的底數內，不是同一個算式得到兩個任意答案。

Q04

1 代入u = 3：2(u + 4) = 2 × (3 + 4)。

2 先算括號：3 + 4 = 7。

3 再乘2：2 × 7 = 14。

4 所以原式的值是14。這裡的2乘上整個括號，不只是乘u。

Q05

給定x = 4時，左邊3 × 4 + 2 = 12 + 2 = 14，與右邊相等，所以在這個給定值下成立。

但這不能證明「對所有實數x成立」。給定x = 0，左邊3 × 0 + 2 = 2，右邊仍是14，而2≠14。這個符合實數範圍的反例已足以否定「所有x」的說法。一次成立的代入檢查與一般恆等關係是不同的問題。

Q06

1 分母是v−2，先要求v−2≠0，也就是v≠2。

2 在v = 2時，分母2−2 = 0，所以6/(v−2)沒有通常實數除法的意義。

3 在v = −1時，分母(−1)−2 = −3，符合非零條件。

4 此時6/(v−2) = 6/(−3) = −2。

5 用除法的反向關係檢查：(−3) × (−2) = 6，計算相符。

Q07

先減5，要把中間結果k−5保留成一組；再乘3，所以代數式是3(k−5)。

給定k = 7，先算7−5 = 2，再算3 × 2 = 6。若誤寫成3k−5，代入7會得到21−5 = 16，那描述的是「先乘3，再減5」，順序與題意不同。

Q08

1 n = 4是非負整數，符合件數條件。

2 代入C = 8 + 3n，得到C = 8 + 3 × 4 = 8 + 12 = 20，總金額是20元。

3 2.5不是整數，所以n = 2.5不屬於這個「整件、不拆售」模型的允許範圍。

4 8 + 3 × 2.5作為實數算式雖然可以計算，但算得出一個數，不會自動讓2.5件變成符合模型的輸入。

第2章 分配律與式的整理

3x + 2x為什麼可以寫成5x？2(x + 3)為什麼不是2x + 3？整理式子不是把相似的字挪在一起，而是在不改變值的前提下，使用明確的運算規則換一種寫法。

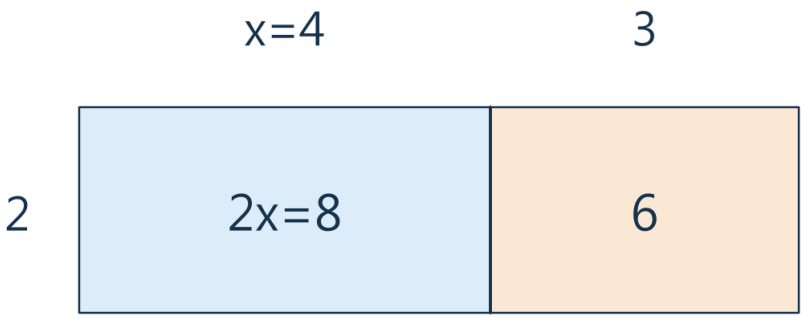
本章沿用實數運算。你會練習展開括號、合併同類項，再把結果反向展開或代入檢查。最後還要分清：一個反例能否定錯誤的恆等說法，但有限次代入不能代替一般的代數理由。

2.1 分配律作用到每一項

對實數a、b、c，分配律寫成a(b + c) = ab + ac。它是本冊採用的實數運算規則之一；同時也使用乘法、加法的交換律與結合律。省略乘號時，ab仍然表示a乘b。

例如2(x + 3)，括號內有x和3兩項。外面的2要乘到兩項，所以得到2x + 2 × 3 = 2x + 6。不是只乘第一項。

$$2(x+3) = 2x+6$$



$$2\times(4+3) = 8+6 = 14$$

圖示取x=4；一般理由是分配律

圖3 | 分配律的面積示意取x = 4：高2、總寬7的矩形分成寬4及寬3兩塊，面積8加6等於14。一般等式的理由是分配律。

圖中取x = 4，只為看清楚分割。若用矩形長度作示意，就不能把負數x當成負的實際長度。2(x + 3) = 2x + 6對所有實數x成立的理由，是實數的分配律，不是這一張有限數值的圖。

減法也要連同符號一起處理。因為b−c = b + (−c)，所以a(b−c) = ab−ac。特別是括號前面的負號，可以先讀成係數−1。

2.2 合併同類項是反向使用分配律

2x + 3x = (2 + 3)x = 5x。第一步是反向使用分配律，把共同的x提出來；第二步才是把係數2和3相加。

本章把變數及其各自次方完全相同的項稱為同類項。例如$2x$與$-3x$是同類項，$2x^2$與$5x^2$也是；但x與x^2不是同類項。常數項之間可以合併。

可以合併的項	共同的變數部分	合併結果
$2x$與$3x$	x	$5x$
$4a^2$與$-a^2$	a^2	$3a^2$
8與-5	沒有變數	3

xy與yx雖然字面順序不同，但在實數乘法中$xy = yx$，因此$3xy - 2yx = xy$。判斷同類項要考慮已允許的運算規則，不是只看字母排版是否一模一樣。

$x + x^2$通常不能合併成$2x$。取$x = 2$，前者是$2 + 4 = 6$，後者是4，所以兩者不是恆等的寫法。個別取值時碰巧相同，不會讓它們成為同一個代數式的普遍整理規則。

例題1 整理$3x + 2(x + 4) - 5$

1. 原式是$3x + 2(x + 4) - 5$，所有括號與符號都先保留。
2. 對括號使用分配律：$2(x + 4) = 2x + 8$。
3. 代回原式，得到$3x + 2x + 8 - 5$。
4. 依加法的交換律與結合律，把含x的項看成一組，常數項看成另一組。
5. 含x的項是$3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$。
6. 常數項是$8 - 5 = 3$。
7. 合起來，原式 $= 5x + 3$。

反向核對可以把$5x$拆回$3x + 2x$，把3寫回$8 - 5$，再把$2x + 8$合回$2(x + 4)$。每一步都有相反方向可用的等式，所以沒有偷偷換成另一個值。

再用$x = -2$檢查算術：原式是$3 \times (-2) + 2 \times ((-2) + 4) - 5 = -6 + 4 - 5 = -7$；整理式是$5 \times (-2) + 3 = -10 + 3 = -7$。這次代入能幫助找錯，一般成立的理由仍是前面的運算規則。

2.3 括號前面的負號不能只照顧一項

若整個括號都要被減去，裡面的每一項都受影響。對任意實數u、v，−(u−v) = −u + v。可以先把左邊寫成(−1)(u + (−v))，再把−1分配到兩項。

例題2 整理4a−(2a−3) + 2

1. 先處理被減去的整個括號：−(2a−3) = (−1)(2a + (−3))。
2. 分配到兩項：(−1) × 2a = −2a，(−1) × (−3) = 3。
3. 因此原式變成4a−2a + 3 + 2。
4. 合併同類項：4a−2a = (4−2)a = 2a。
5. 合併常數項：3 + 2 = 5。
6. 所以4a−(2a−3) + 2 = 2a + 5。

若把括號去成4a−2a−3 + 2，就是漏掉了原本「減去−3」的作用。取a = 0，原式是0−(−3) + 2 = 5；錯式卻得到−1，足以否定那個錯誤的恆等說法。

反向看，2a + 5可以寫成4a−2a + 3 + 2，再把−2a + 3收成−(2a−3)，回到原式。這是按規則回查，不是任意加上一個括號。

2.4 兩個和相乘要分配兩次

例題3 展開(x + 2)(x + 3)

1. 先把右邊整個x + 3當作一組，對左括號的兩項分配：原式 = x(x + 3) + 2(x + 3)。
2. 第一組再分配：x(x + 3) = x × x + x × 3 = x^2 + 3x。
3. 第二組再分配：2(x + 3) = 2x + 6。
4. 合起來得到x^2 + 3x + 2x + 6。
5. 3x與2x是同類項，合成5x；x^2不是x項，不能一起合併。
6. 因此(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6，對所有實數x成立。

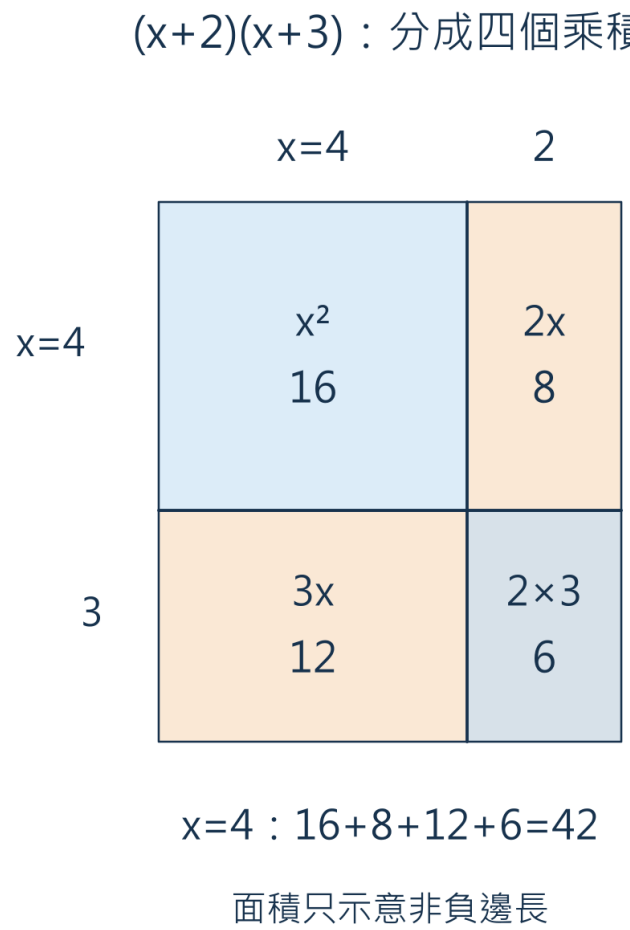


圖4 | 兩個和相乘的面積示意取x = 4：總寬6、總高7，四塊分別表示x²、2x、3x、6；面積16、8、12、6合計42。

圖只是把四個乘積放在不同區域。圖中取x = 4時，左邊是6 × 7 = 42，右邊是16 + 20 + 6 = 42；對任意實數x的等式則由前面的兩次分配律得到。負的x不能照搬成負的實際邊長。

只把首項相乘、末項相乘而寫成x² + 6，會漏掉中間的3x與2x。例如x = 1時，原式為3 × 4 = 12，錯式為7。這個反例否定錯式，但不取代正確展開的逐步理由。

2.5 恆等與一次代入檢查

在一個明示範圍內，兩個式子對每個允許的值都相等，就稱它們在該範圍內恆等。本章的三個整理例題都沒有分母或其他排除條件，使用的規則對全部實數取值適用。

代入一個值發現不相等，可以反駁「所有值都相等」。代入幾個值都相等，只表示這些取值沒有找出錯誤，還不能單獨建立一般恆等。說明分配律、合併同類項及其他合法步驟，才是本章整理式子的主線。

2.6 常見錯誤

- $2(x+3)$只乘到x，漏掉2乘3。
- $-(u-v)$去括號時只改第一項，漏掉減去負數會得到加上相應的正數。
- 因為都含x，就把x和x^2當成同類項。
- 兩個和相乘時漏掉交叉的兩個乘積。
- 把少數幾次代入相同，當成對所有實數成立的證明。

2.7 本章回顧

整理式子時，先處理括號，再辨認同類項，最後核對每個符號與乘積的去向。下一章要處理的是等式何時成立；式子恆等的改寫可以放進方程，但「解方程」還需要說清楚每一步是否保留全部解。先完成下面練習並核對解答，再進入下一章。

2.8 練習

下列變數均取實數。每題請寫出使用的整理步驟，不只寫最後結果。

1 **B02-C02-Q01** 合併$2x + 5x - 3x$。

2 **B02-C02-Q02** 整理$7 - 2y + 4y - 1$。

3 **B02-C02-Q03** 展開$5(a + 2)$。

4 **B02-C02-Q04** 展開$-3(t - 4)$，保留兩個乘積的符號。

5 **B02-C02-Q05** 整理$2(3x - 1) + x + 5$。

6 **B02-C02-Q06** 整理$6m - (m + 2)$。

7 **B02-C02-Q07** 展開$(z + 1)(z + 4)$，把四個乘積都寫出來。

8 **B02-C02-Q08** 有人說$2(x + 3) = 2x + 3$對所有實數x成立。用$x = 0$指出問題，再用分配律給出正確整理式。

2.9 完整解答

Q01

1 三項的變數部分都是x，因此可以合併係數。

2 $2x + 5x - 3x = (2 + 5 - 3)x$。

3 $2 + 5 - 3 = 4$，所以結果是$4x$。

Q02

1 依加法交換律與結合律，把式子寫成$(-2y + 4y) + (7 - 1)$。

2 y項合併為$(-2 + 4)y = 2y$。

3 常數項合併為$7 - 1 = 6$。

4 結果是$2y + 6$。常數6不帶y，不能再和2y合併成8y。

Q03

1 係數5要乘到括號中的兩項：$5(a + 2) = 5a + 5 \times 2$。

2 算出$5 \times 2 = 10$，得到$5a + 10$。

3 反向提出共同因子5，就能從$5a + 10$回到$5(a + 2)$。

Q04

1 $t - 4$讀成$t + (-4)$。

2 分配-3，得到$(-3)t + (-3) \times (-4)$。

3 第二個乘積是12，所以結果是$-3t + 12$。

4 不能把它寫成$-3t - 12$；那是把負負相乘的符號算錯。

Q05

1 展開括號：$2(3x-1)=6x-2$。

2 原式變成$6x-2+x+5$。

3 合併x項：$6x+x=7x$，這裡單獨的x有係數1。

4 合併常數項：$-2+5=3$。

5 所以結果是$7x+3$。

Q06

1 整個$m+2$都要被減去，所以$-(m+2)=-m-2$。

2 原式變成$6m-m-2$。

3 $6m-m=(6-1)m=5m$，因此結果是$5m-2$。

4 反向把$5m$寫回$6m-m$，再把$-m-2$收成$-(m+2)$，就回到原式。

Q07

1 對第一個括號分配：$(z+1)(z+4)=z(z+4)+1(z+4)$。

2 繼續展開兩組：$=z\times z+z\times 4+1\times z+1\times 4$。

3 寫出各乘積：$=z^2+4z+z+4$。

4 合併同類項：$4z+z=5z$。

5 所以結果是z^2+5z+4。四個乘積都已出現，沒有漏掉中間兩項。

Q08

取$x=0$，左邊$2(0+3)=6$，右邊$2\times 0+3=3$。$6\neq 3$，所以原來的「所有實數x」說法不成立。

正確使用分配律，$2(x+3)=2x+2\times 3=2x+6$。後面這條恆等式的理由是把2分配到兩項，不是只因為$x=0$這次剛好相等。

第3章 一元一次方程

計算$3x+5$在$x=5$時的值，是代入。現在反過來：如果已知$3x+5=20$，要如何找出所有符合條件的x？只猜到一個能用的值還不夠，我們還要說明為什麼沒有漏掉其他解。

本章的未知數取實數。核心是一元一次方程：整理後可以寫成$ax+b=0$，其中a、b是給定的實數，且$a\neq 0$。章末也會檢查整理後x項消失的等式；那兩種退化情形不屬於$a\neq 0$的這一類，必須另判斷解集。

3.1 解與同解的意思

讓原等式兩邊相等、而且符合原來條件的值，叫作解。把所有解放在一起，叫作解集。兩個方程在同一個允許範圍內有相同解集，就稱為同解。

例如$x+2=5$與$x=3$在實數範圍內同解。不是說左邊的式子$x+2$與x本身恆等，而是說能讓各自等式成立的x都是同一個3。

本章用$\Leftrightarrow$表示所列的兩個方程同解。每次寫這個符號，都要能交代兩個方向；若只知道原式成立會推出後式成立，還不能直接寫成同解。

3.2 哪些操作可以保留全部解

兩邊同加或同減一個在論域內有意義的量，可以用相反操作回到原式。兩邊同乘或同除一個已知非零常數，也可以用相反操作回去。

操作	反向操作	要保留的條件
兩邊同減5	兩邊同加5	兩邊原本都有意義
兩邊同加2x	兩邊同減2x	同一個x，且各項在論域內有意義
兩邊同除3	兩邊同乘3	3≠0

把含x的量加到兩邊，也可以合法。例如對每一個固定的實數x，2x都是有意義的同一個量；加上2x後，再減去2x即可回去。不能在左右兩邊偷偷選不同的x。

「移項換號」只是這些步驟的簡稱。剛開始練習時，請寫出兩邊同做了什麼，不要把換號當成沒有理由的搬家規則。

例題1 解3x + 5 = 20

1. 先保留原方程3x + 5 = 20，未知數x取實數。
2. 兩邊同減5，得到3x + 5−5 = 20−5。
3. 整理兩邊，得到3x = 15。
4. 因為3≠0，兩邊可以同除3，得到(3x)/3 = 15/3。
5. 整理後得到x = 5。

每一步都可逆，所以可以摘要為：3x + 5 = 20 ⇔ 3x = 15 ⇔ x = 5。

回代原式：左邊3 × 5 + 5 = 15 + 5 = 20，等於右邊，所以5確實是解。反向從x = 5出發，兩邊同乘3得到3x = 15，再同加5就回到原式。

不是只因為「試到5可用」就宣稱唯一。任何原方程的解，都必須經過這些可逆步驟得到x = 5；而5又能回到原式，因此解集恰好只有5。

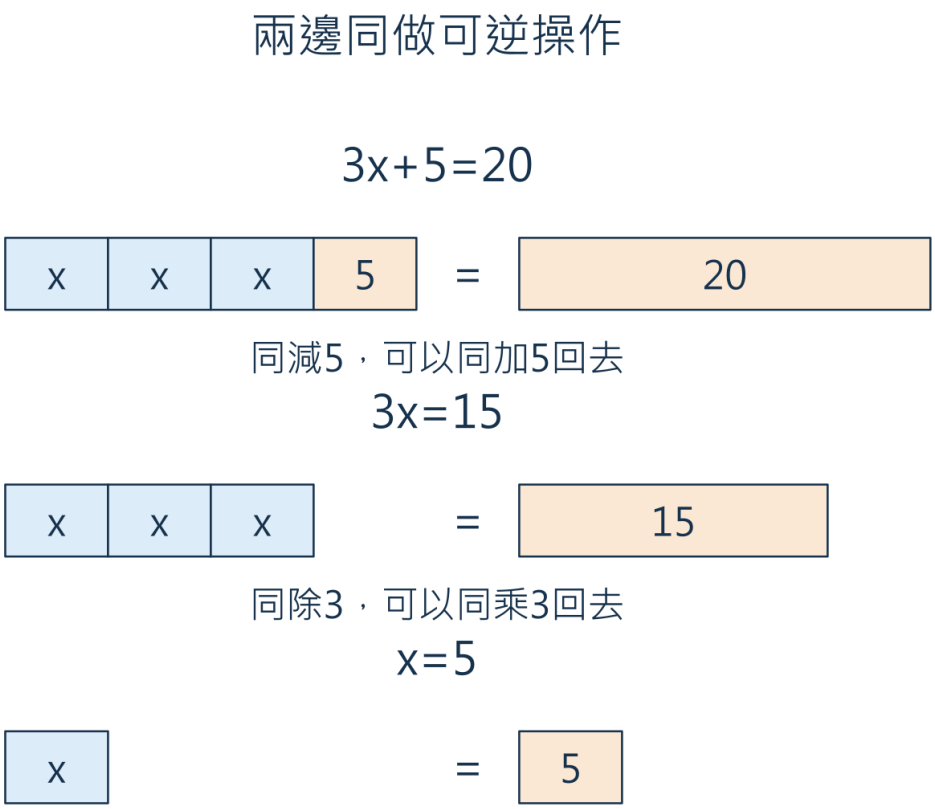


圖5 | 同解變形的長條示意以已求得的x = 5核對：3x加5與20平衡，同減5後3x與15平衡，再同除3得到x與5。

圖中長條按本例已求得的正數x = 5示意，不是用量圖的寬度猜出解，也不把負數解畫成負的實際重量。解的資格仍由可逆的等式步驟決定。

3.3 未知數在兩邊時先展開再整理

例題2 解2(x−3) + 4 = 3x−5

1 左邊用分配律展開：2(x−3) + 4 = 2x−6 + 4 = 2x−2。這是對所有實數x成立的式子改寫。

2 方程因此同解於2x−2 = 3x−5。

3 兩邊同減2x，得到−2 = x−5。

4 兩邊同加5，得到3 = x。

5 等號兩邊可以對調，因此x = 3。

回代原式，左邊2(3−3) + 4 = 0 + 4 = 4；右邊3 × 3−5 = 9−5 = 4，所以成立。

反向核對：從x = 3先對調等號，得到3 = x；同減5得到−2 = x−5；同加2x得到2x−2 = 3x−5；再把左邊改寫回2(x−3) + 4。全部步驟在實數範圍內有意義，也都能回去，所以沒有漏解或多加解。

3.4 分母是已知常數時可以一起清除

例題3 解(x−1)/3 + (x + 2)/2 = 4

1 這裡的分母是已知的3與2，都不是0，因此原式對每個實數x都有意義。

2 取公倍數6。因為6≠0，兩邊同乘6是可逆操作。

3 左邊的兩項及右邊都要乘6，得到2(x−1) + 3(x + 2) = 24。

4 展開左邊：2x−2 + 3x + 6 = 24。

5 合併同類項，得到5x + 4 = 24。

6 兩邊同減4，得到5x = 20。

7 因為5≠0，兩邊同除5，得到x = 4。

回代原式：(4−1)/3 + (4 + 2)/2 = 3/3 + 6/2 = 1 + 3 = 4，與右邊相等。反向從x = 4依序乘5、加4，展開成兩組，再把等式兩邊同除6，可以回到原來的分數方程。

不能只讓第一個分數乘6，也不能忘記把右邊的4改成24。若分母含有未知數，還要先列非零條件；那是第9章要進一步整理的資格，本例不靠省略條件來清除分母。

3.5 整理後一次項消失時不要硬除以0

同樣寫著x的等式，整理後不一定還有非零的一次項。先看一般形式ax + b = 0。

- 若a≠0，兩邊同減b，再同除a，唯一解是x = −b/a。這才是本章核心的一元一次方程。
- 若a = 0而b≠0，等式變成b = 0，無論x取什麼都不成立，所以無解。
- 若a = 0而b = 0，等式變成0 = 0。在原論域沒有額外排除點時，每一個實數x都是解。

後兩種不符合一元一次方程的非零係數條件，仍須正確描述其解集。不能看到0x = 4就寫x = 4/0，也不能看到0 = 0就說x = 0。

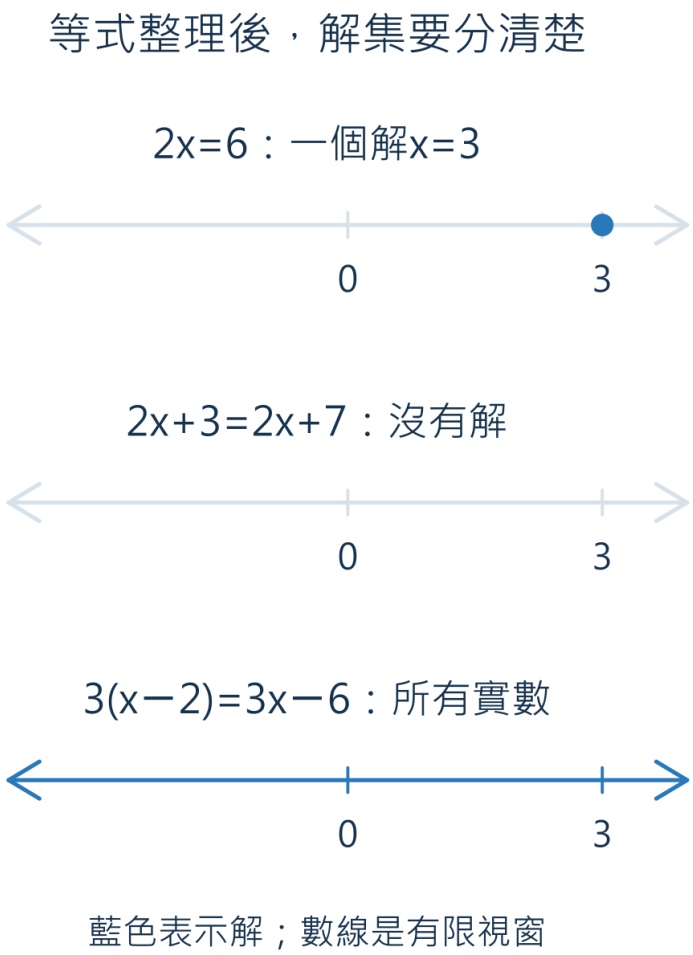


圖6 | 等式整理後的三種結果：2x = 6只有解3；2x + 3 = 2x + 7沒有解；3(x−2) = 3x−6對所有實數成立。數線只是有限視窗。

圖中的空數線表示沒有符合條件的點，不是把0當成一個解；整條帶箭頭的數線表示所有實數，不把範圍限制在畫出的有限視窗。

3.6 回代與可逆性各自檢查什麼

回代是在檢查候選值是否符合原式。可逆性是在追蹤整個解集是否保持不變。這兩件事要配合使用。

例如x = 2若兩邊同乘0，會得到0 = 0。原來的解只有2，後來的等式卻對每個實數成立，因此「同乘0」不能當成一般的同解規則。原式成立確實會推出0 = 0，但從0 = 0不能反推x = 2。

本章求解時只除以已確認非零的常數。把等式兩邊同除未知數，不會因為「兩邊都有同樣的字」就自動合法；若它可能是0，就不能直接做這個除法。

3.7 常見錯誤

- 移項時換了符號，卻說不出兩邊同做了哪個操作。
- 去括號漏乘某一項，或清分母只乘到等式的一部分。
- 除以可能為0的量，沒有保留條件。
- 只回代一個猜到的數，就宣稱已找出全部解。
- 把一次項消失後的矛盾或恆等式，都硬當成具有唯一解的一元一次方程。

3.8 本章回顧

完整的解方程應包含原論域、每一步操作及其資格、整理後的解集，最後回代原式。能回代成功，代表這個候選值確實可用；能交代所有同解步驟，才支持沒有增解或漏解。下一章將把這個習慣帶到不等式，但那裡還要另檢查不等號的方向。先完成下面練習並核對解答，再進入下一章。

3.9 練習

未知數x均取實數。前6題求解並回代；第7、8題整理後一次項消失，請判斷解集，不要強行套用非零係數的公式。

1 **B02-C03-Q01** 解$x + 7 = 12$。

2 **B02-C03-Q02** 解$4x = 28$。

3 **B02-C03-Q03** 解$-2x + 3 = 11$。

4 **B02-C03-Q04** 解$5x - 4 = 2x + 8$。

5 **B02-C03-Q05** 解$3(x + 2) = 2x + 11$。

6 **B02-C03-Q06** 解$(x + 1)/2 = 5$。

7 **B02-C03-Q07** 判斷$2x + 3 = 2x + 7$的解集。

8 **B02-C03-Q08** 判斷$3(x - 2) = 3x - 6$的解集。

3.10 完整解答

Q01

1 兩邊同減7：$x + 7 - 7 = 12 - 7$。

2 整理得到$x = 5$。加回7即可反向回到原式，因此同解。

3 回代：$5 + 7 = 12$，所以解集只有5。

Q02

1 $4 \neq 0$，兩邊同除4，得到$x = 28/4 = 7$。

2 反向同乘4可回到$4x = 28$，所以沒有漏掉其他解。

3 回代：$4 \times 7 = 28$，解集只有7。

Q03

1 兩邊同減3，得到$-2x = 8$。

2 $-2 \neq 0$，兩邊同除-2，得到$x = 8/(-2) = -4$。

3 每一步都能用相反操作回去，因此解集只有-4。

4 回代原式：$(-2) \times (-4) + 3 = 8 + 3 = 11$。等式兩邊同除負數仍是等式，不是在這裡翻轉一個不等號。

Q04

1 原式$5x-4=2x+8$，兩邊同減$2x$，得到$3x-4=8$。

2 兩邊同加4，得到$3x=12$。

3 因$3\neq0$，兩邊同除3，得到$x=4$。

4 回代：左邊$5\times4-4=16$，右邊$2\times4+8=16$，符合原式。

5 加回、減回及同乘3都合法，所以這些是同解步驟，解集只有4。

Q05

1 左邊展開為$3x+6$，方程同解於$3x+6=2x+11$。

2 兩邊同減$2x$，得到$x+6=11$。

3 兩邊同減6，得到$x=5$。

4 回代原式：左邊$3(5+2)=21$，右邊$2\times5+11=21$。

5 展開和兩次減法都可逆，因此解集只有5。

Q06

1 分母2固定且非零，原式對所有實數x都有意義。

2 兩邊同乘2，得到$x+1=10$。

3 兩邊同減1，得到$x=9$。

4 回代：$(9+1)/2=10/2=5$。

5 乘2與減1都可以反向操作，所以解集只有9。

Q07

1 兩邊同減2x，得到3 = 7。

2 3 = 7是假等式，而且不再含x。沒有任何實數x能改變這個矛盾。

3 因為同減2x是可逆步驟，原式也沒有解，解集為空集合。

4 這不是x = 0，也不是要用0去除某個數。整理後一次項係數是0，不屬於非零係數的一元一次方程。

Q08

1 左邊依分配律展開：3(x−2) = 3x−6。

2 方程變成3x−6 = 3x−6，兩邊是同一個式子。

3 也可兩邊同減3x，得到−6 = −6，始終成立。

4 原式沒有分母或其他排除條件，所以上述改寫對每個實數x都合法，解集是ℝ。

5 一次項消失後是恆等式，不是唯一解x = 0。也不是只代入幾個值，就把剩下所有實數猜成解。

第4章 不等式與解集

「至多5件」與「少於5件」不同：前者允許5，後者不允許。不等式也要保留這種邊界差別。求解不只是在最後寫出一個數，而是指出哪些值符合條件、哪些端點包含在內。

本章純代數問題的未知數取實數。先備是前三章的式子整理、同解操作與回查。圖中的數線只畫有限視窗，兩端箭頭不把實數限制成有限個刻度。

4.1 大小關係與端點

$x < 3$表示x嚴格小於3，不能取3；$x \le 3$則可以取3。相應地，$x > 3$與$x \ge 3$也有相同的端點差別。

區間$(-\infty,3)$表示所有小於3的實數；$(-\infty,3]$包含3。圓括號排除有限端點，方括號包含有限端點。∞與$-\infty$在這裡不是實數，所以不把它們寫成包含端點的方括號。

兩邊同加或同減一個量，大小方向不變。兩邊同乘或同除正數，方向也不變；若乘除的是負數，方向必須反過來。例如$1 < 2$，但同乘-1後，$-1 > -2$。

這不是只靠這個例子訂規則。對$a < b$，差$b-a$是正數；乘上正數仍為正，乘上負數則為負，正是順序需要保留或反轉的原因。若乘0，原來的嚴格大小差別會消失，不能用它作一般的同解操作。

例題1 解$3x-2 < 7$

1. 兩邊同加2，得到$3x < 9$。
2. 3是正數，兩邊同除3，方向不變，得到$x < 3$。
3. 每一步都可用相反的合法操作回去，所以解集是$(-\infty,3)$。
4. 用邊界檢查：$x = 3$時，左邊7不嚴格小於7，因此不包含3；取$x = 0$，左邊$-2 < 7$，確實在解集中。

檢查幾個值不是逐一窮盡整條數線；全部解由上面的同解步驟得到。

4.2 除以負數要改變方向

例題2 解 $-2x+5\ge 11$

1 兩邊同減5，得到$-2x\ge 6$。

2 除數-2是負數，兩邊同除-2時，把$\ge$改成$\le$。

3 得到$x\le -3$，解集為$(-\infty,-3]$。

4 $x=-3$使左邊11等於右邊11，所以包含端點。

5 取$x=-4$，左邊$8+5=13\ge 11$；取$x=-2$，左邊$4+5=9$，不符合條件。

反向從$x\le -3$同乘-2，方向變回$\ge$，得到$-2x\ge 6$，再同加5回到原式。

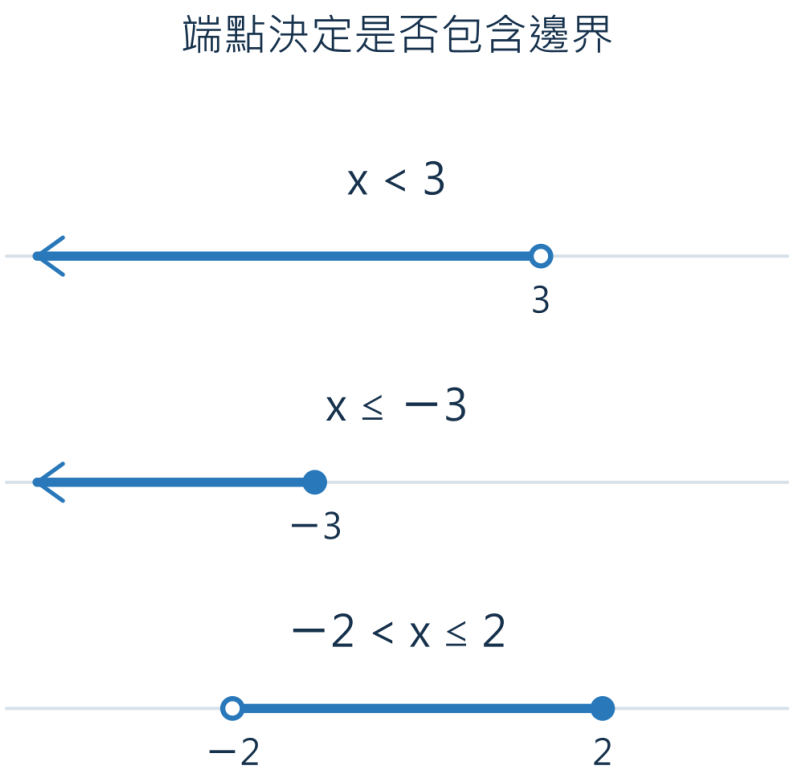


圖7 | 不等式解集以數線區分開端點與閉端點：x小於3不含3，x小於等於負3含負3；複合條件取負2到2之間且只含右端。

4.3 兩個條件要分清楚且與或

$-1 < 2x + 3 \le 7$要求兩個比較同時成立。「且」取共同部分；「或」只要至少一個條件成立，取兩部分的聯集。

例題3 解$-1 < 2x + 3 \le 7$

1 把它看成$-1 < 2x + 3$，且$2x + 3 \le 7$。

2 三部分同減3，得到$-4 < 2x \le 4$；這等於對兩個不等式都做同減3。

3 同除正數2，兩個方向都不變，得到$-2 < x \le 2$。

4 解集為$(-2,2]$。$x = -2$使中間值等於-1，違反左邊的嚴格小於；$x = 2$使中間值等於7，符合右邊的$\le$。

5 每個條件都可逆，因此共同保留的範圍正是全部解。

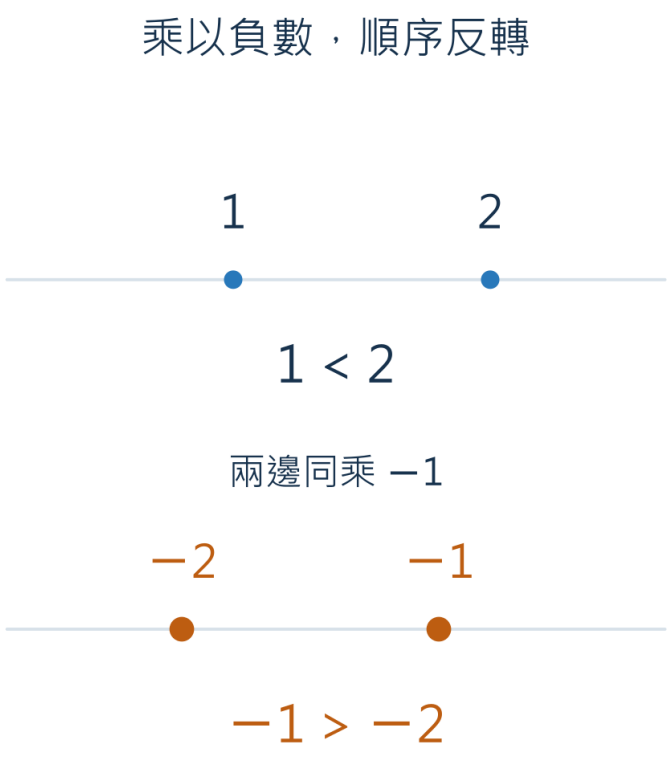


圖8 | 數線上的1小於2；同乘負1後對應點成為負1與負2，大小方向反轉。有限點示意配合正文的順序理由，不單靠兩點證明一般規則。

若題目是x < −1或x≥2，中間不是要「同時小於−1又大於等於2」，而是保留左側與右側兩段。讀錯連接詞，就會把非空的聯集誤判成沒有解。

4.4 本章回顧

先讀嚴格與非嚴格符號，再逐步做兩邊同運算；負數乘除一定檢查方向。寫出解集後，逐一核對端點是否包含，以及多個條件是且還是或。

4.5 練習

1 **B02-C04-Q01** 解$x+4\le 9$，說明端點是否包含。

2 **B02-C04-Q02** 解$5x>15$。

3 **B02-C04-Q03** 解$-3x<6$。

4 **B02-C04-Q04** 解$7-2x\le 1$。

5 **B02-C04-Q05** 解$2(x-1)\ge x+3$。

6 **B02-C04-Q06** 解$1\le 3x+4<10$。

7 **B02-C04-Q07** 用區間表示$x<-1$或$x\ge 2$，判斷-1與2是否在解集中。

8 **B02-C04-Q08** 有人把$-2x\le 6$整理成$x\le -3$。用$x=0$檢查，再寫出正確解集。

4.6 完整解答

Q01

兩邊同減4，得到$x \le 5$，所以解集是$(-\infty,5]$。代入5得到$9 \le 9$，端點包含；減4可用加4回去，因此沒有漏解。

Q02

5是正數，同除5不改方向，得到$x > 3$，解集是$(3,\infty)$。代入3只有$15 = 15$，不符合嚴格大於，所以排除3。

Q03

同除負數-3時，把 $<$ 改成 $>$，得到$x > -2$，解集為$(-2,\infty)$。例如$x = 0$使$0 < 6$成立；端點-2使$6 < 6$不成立。

Q04

1. 兩邊同減7，得到$-2x \le -6$。
2. 同除-2並反轉方向，得到$x \ge 3$。
3. 解集是$[3,\infty)$。回代3，左邊$7-6=1$，符合≤ 1。

Q05

先展開為$2x-2\geq x+3$；兩邊同減x，得$x-2\geq 3$；再同加2，得$x\geq 5$。解集為$[5,\infty)$。展開及加減都可逆；代入5，原兩邊都等於8。

Q06

三部分同減4，得$-3\leq 3x<6$；同除正數3，得$-1\leq x<2$。解集為$[-1,2)$：左端可以等於，右端不可以等於。

Q07

解集是$(-\infty,-1)$與$[2,\infty)$的聯集。-1不在左段，也不在右段，所以排除；2在右段，因此包含。0位於兩段之外，因此不在解集中。一般地，不在這個聯集內的實數恰好滿足$-1\leq x<2$：它既不滿足$x<-1$，也不滿足$x\geq 2$，所以都不是解。這個整段判定來自原條件的「或」，不是只憑$x=0$這一個代入值推廣。

Q08

$x=0$時，原式是$0\leq 6$，成立；錯誤結果卻要求$0\leq -3$，不成立，表示那一步沒有保留原解。正確同除-2必須反轉方向，得到$x\geq -3$，解集為$[-3,\infty)$。

第5章 聯立一次方程

兩種票合計12張，票款又有一個總數，通常需要同時使用兩個條件。聯立方程的解不是只符合其中一條，而是同一組未知數使全部方程都成立。

本章未知數x、y取實數，解寫成有順序的(x,y)。若題目把它們解釋成件數，還要另外檢查整數與非負條件，不能把實數解直接當成合格的件數。

5.1 代入法保留另一條方程

把一條方程改寫成y = 某個含x的式子，再代入另一條，可以把兩個未知數暫時化成一個。原來用於替換的關係仍須保留，才能找回y並檢查整組解。

例題1 解x + y = 7 且2x − y = 2

1. 第一條同減x，得到y = 7 − x。
2. 將同一個y代入第二條，得到2x − (7 − x) = 2。
3. 去括號並合併，得到3x − 7 = 2，所以3x = 9，x = 3。
4. 代回保留的關係，y = 7 − 3 = 4。
5. 檢查第一條3 + 4 = 7，第二條2 × 3 − 4 = 2，兩條都成立。

每個聯立解都必須滿足y = 7 − x及代入後的方程；後者唯一決定x = 3，前者再唯一決定y = 4。反向代入也成立，因此唯一解是(3,4)，不是只試到了一組可用的數。

5.2 消去法與等價的方程組

兩條等式可以相加，但若只留下相加結果、把其他條件全丟掉，資訊可能變少。常用的安全做法是保留一條方程，用「另一條加上它的倍數」替換另一條；反向減回相同倍數就能復原。

例題2 解2x + 3y = 12 且3x−2y = 5

1. 第一條同乘非零常數2，得到4x + 6y = 24。
2. 第二條同乘非零常數3，得到9x−6y = 15。
3. 相加得到13x = 39，同時保留第一條或第二條的關係。
4. 因13≠0，得x = 3。
5. 代入第一條：6 + 3y = 12，所以3y = 6，y = 2。
6. 回查第二條：9−4 = 5；第一條6 + 6 = 12也成立。

唯一解是(3,2)。為什麼相加沒有漏掉條件？因為我們保留了一條方程：由它和相加式，可以反向減回另一條。只寫13x = 39而從此不再處理y，並不是完整解答。

消元不等於丟掉條件

$$4x + 6y = 24$$

$$9x - 6y = 15$$

$$13x = 39 \rightarrow x = 3$$

代回原式：$2\times3 + 3y = 12 \rightarrow y = 2$

圖10 | 消去y的係數對照：兩條方程分別乘2與3，得到正6y及負6y；相加後13x等於39，仍保留一條原關係求y。

5.3 平行與重合對應不同代數結果

當ax + by = c中的a、b不全是0時，它在平面上是一條直線。兩條方程所表示的直線可以相交、平行而不同，或彼此重合。這個圖形對照要以方程的代數關係確認，不是靠畫得像不像。

例題3 相似寫法可能無解也可能有無限多解

先看x + y = 3且2x + 2y = 8。

1. 第一條同乘2得到2x + 2y = 6。
2. 它與第二條相減，得到0 = 2，這不可能成立。
3. 所以沒有同時符合兩條的實數組，聯立方程無解。

再把第二條改成2x + 2y = 6。

1. 這次第二條恰是第一條的2倍，沒有增加新的限制。
2. 令x = t，其中t可取任意實數，第一條就給出y = 3 − t。
3. 代入第二條，2t + 2(3 − t) = 6，始終成立。
4. 因此全部解是(t, 3 − t)，t取任意實數。不同t給出不同的有序數對，所以有無限多解。

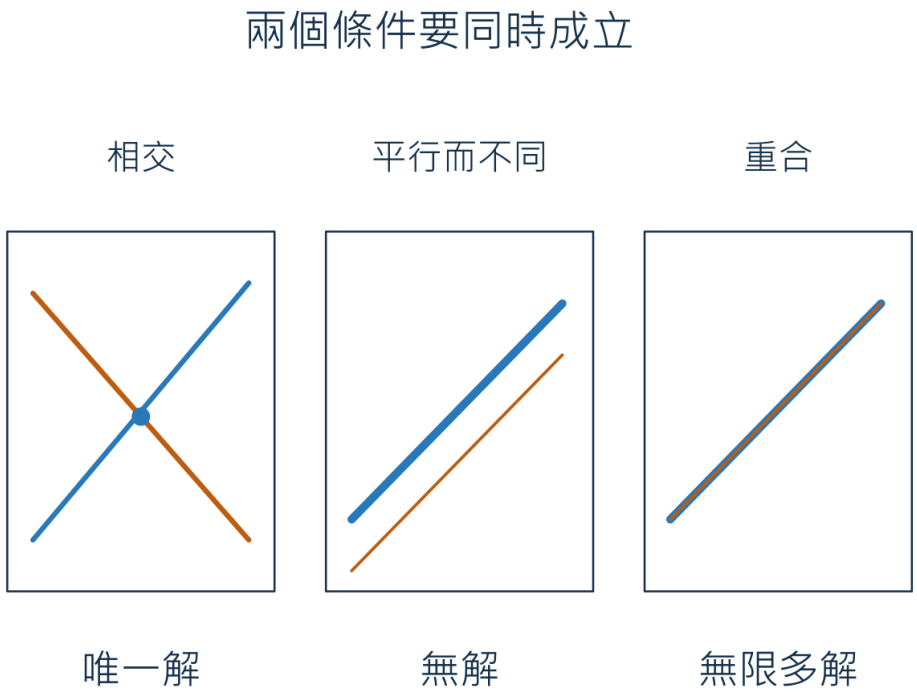


圖9 | 三種聯立關係的平面示意：相交有一組解，平行沒有交點，重合則整條線上的點都符合。線段只畫有限視窗，分類由代數確認。

「看見兩條方程」不保證兩條獨立限制。若係數全為0，還可能直接出現0 = 0或0 = 1，須按陳述本身判斷，不硬套直線圖。

5.4 本章回顧

先列出全部條件，再使用代入或可逆的消去操作。求出一個未知數後，要找回另一個，最後逐條回代。若消去後出現矛盾，沒有解；若只剩一條有效限制，就描述全部符合它的數對，不隨意挑一組當成全部。

5.5 練習

1 **B02-C05-Q01** 解$x+y=5$且$x-y=1$。

2 **B02-C05-Q02** 解$x+2y=8$且$x-y=2$。

3 **B02-C05-Q03** 解$2x+y=7$且$x+y=4$。

4 **B02-C05-Q04** 解$x-y=4$且$2x+y=11$。

5 **B02-C05-Q05** 判斷$x+y=2$且$2x+2y=5$的解集。

6 **B02-C05-Q06** 描述$x-2y=1$且$2x-4y=2$的全部實數解，以$y=t$表示。

7 **B02-C05-Q07** 檢查$(2,1)$是否同時符合$x+2y=4$與$3x-y=5$。這兩條是否另有其他實數解？

8 **B02-C05-Q08** $x+y=4$與$x-y=0$相加得$2x=4$。只留下$x=2$是否足夠？用$(2,0)$說明，再完成原聯立方程。

5.6 完整解答

Q01

兩條相加得$2x = 6$，所以$x = 3$。代入$x + y = 5$，得$y = 2$。原式檢查$3 + 2 = 5$及$3 - 2 = 1$都成立。保留一條再反向減回另一條，能復原整組，因此唯一解是$(3,2)$。

Q02

第一條減第二條得$3y = 6$，所以$y = 2$。保留$x - y = 2$，得到$x = 4$。回查$4 + 2 \times 2 = 8$及$4 - 2 = 2$，唯一解是$(4,2)$。

Q03

第一條減第二條得到$x = 3$。代回第二條，$y = 1$。檢查$2 \times 3 + 1 = 7$，且$3 + 1 = 4$，所以唯一解是$(3,1)$。

Q04

兩條相加得$3x = 15$，所以$x = 5$。由$x - y = 4$，得$5 - y = 4$，即$y = 1$。回查$5 - 1 = 4$及$10 + 1 = 11$，因此唯一解是$(5,1)$。

Q05

第一條乘2要求$2x+2y=4$，第二條卻要求同一個左邊等於5。相減得到$0=1$，矛盾，所以解集為空。這不是說x或y必須取0。

Q06

第二條是第一條的2倍，只需保留$x-2y=1$。令$y=t$，便得$x=1+2t$。代回兩條，$(1+2t)-2t=1$，$2(1+2t)-4t=2$，所以全部解為$(1+2t,t)$，t取任意實數。

Q07

代入$(2,1)$，第一條$2+2=4$，第二條$6-1=5$，都成立。再用第一條求$x=4-2y$，代入第二條得$12-7y=5$，故$y=1$、$x=2$。這也說明沒有其他實數解，唯一解是$(2,1)$。

Q08

$(2,0)$符合$2x=4$，卻不符合原第一條$2+0=4$，表示只留下相加結果會多收進不合格的數對。保留$x-y=0$，再代入$x=2$，得$y=2$；回查兩條均成立，所以原方程組唯一解是$(2,2)$。

第6章 多項式的運算

多項式把不同次方的項組在一起。整理時要同時追蹤係數、次方及正負號；不是把所有看起來有x的東西都合成同一項。

本章以一個實數變數x為主，係數是固定實數，指數為非負整數。例如$2x^3-5x+7$是多項式；$1/x$和$\sqrt{x}$不是這個定義下的x多項式。

6.1 次數看最高的非零項

$5x^3-2x+7$的最高非零次方是3，次數為3，最高次項係數為5，常數項為7。缺少的x^2項可用係數0記錄，但不會因此改變多項式的值。

非零常數多項式的次數是0。本冊不為零多項式指定通常的非負整數次數；有些其他語境另設約定，不能默默混用。多項式在一個取值時算出0，也不表示它就是零多項式。

沒有寫出的次方，係數是零

$$5x^3 + 0x^2 - 2x + 7$$

x^3	x^2	x	1
5	0	−2	7

最高非零次方是 3 → 次數為 3

零多項式：不在本書指定次數。

圖11 | 多項式$5x^3$減2x加7的係數位置：三次項5、二次項0、一次項負2、常數項7；缺項的0只是位置記錄。

6.2 加法逐次方合併

例題1 計算$(2x^2-3x+1)+(x^2+5x-4)$

1 加上整個括號，不改變其中各項符號，得到$2x^2-3x+1+x^2+5x-4$。

2 x^2項合併為$(2+1)x^2=3x^2$。

3 x項合併為$(-3+5)x=2x$。

4 常數合併為$1-4=-3$。

5 結果是$3x^2+2x-3$。

反向依次拆開三組係數，就能回到原來兩個多項式的和。取$x=1$作算術檢查，原兩括號分別為0與2，和為2；結果式為$3+2-3=2$。一般恆等的理由是同類項合併，不是只靠$x=1$。

6.3 減法先改變整個被減式的符號

例題2 計算$(x^2-2x+3)-(2x^2+x-1)$

1. 括號前的負號作用到全部三項：$-(2x^2+x-1)=-2x^2-x+1$。
2. 原式變成$x^2-2x+3-2x^2-x+1$。
3. x^2項是$x^2-2x^2=-x^2$。
4. x項是$-2x-x=-3x$，常數為$3+1=4$。
5. 所以結果是$-x^2-3x+4$。

取$x=0$，原式$3-(-1)=4$，結果也為4。若把末項錯改成-1，就會錯得2；數值反查可發現這類符號錯誤。

6.4 乘法要寫出全部分配項

例題3 展開$(2x-1)(x^2+x+3)$

1. 把左邊兩項分配到整個右括號，得$2x(x^2+x+3)-1(x^2+x+3)$。
2. 第一組產生$2x^3+2x^2+6x$。
3. 第二組產生$-x^2-x-3$。
4. 合起來為$2x^3+2x^2+6x-x^2-x-3$。
5. 合併同類項，得到$2x^3+x^2+5x-3$。

每一項都要乘到每一項

$$(2x - 1)(x^2 + x + 3)$$

$2x^3$	$2x^2$	$6x$
$-x^2$	$-x$	-3

合併：$2x^3 + x^2 + 5x - 3$

這是乘積表，不是帶負長度的面積圖。

圖12 | 兩項乘三項的乘積表共有六格，依序保留2x與負1乘到x^2、x及3的結果；色塊是代數項的表格，不表示負的物理面積。

六個乘積都要出現，才再合併。反向把結果拆成$2x^3+2x^2+6x$與$-x^2-x-3$兩組，即可分別提出2x及−1，回到原式。

若兩個非零實係數多項式相乘，各自最高次項相乘會產生「兩者次數相加」的項，係數是兩個非零係數的乘積，因此仍非零。其他任何乘積只要至少選到其中一式較低次的項，次數就嚴格小於這個和，不能與最高次項合併抵消。因此，乘積次數是兩者次數的和。這個說明需要「兩者非零」；加法則可能因最高次項抵消而降次，不能照搬乘法結論。

6.5 本章回顧

加減法按相同次方對齊，減法先照顧整個括號；乘法逐項分配，再合併。最後重新檢查最高非零次方。不要把一個代入值為0、零多項式和次數為0混成同一件事。

6.6 練習

1 **B02-C06-Q01** 指出$5x^3-2x+7$的次數、最高次項係數及常數項。

2 **B02-C06-Q02** 非零常數多項式-4的次數是多少？

3 **B02-C06-Q03** x^2-x^2整理後是什麼？本冊是否把它的次數說成0？

4 **B02-C06-Q04** 計算$(3x^2+x-2)+(-x^2+4x+5)$。

5 **B02-C06-Q05** 計算$(4x^2-x+6)-(x^2+2x-1)$。

6 **B02-C06-Q06** 展開$x(x^2-3x+2)$。

7 **B02-C06-Q07** 展開$(2x+1)(x-3)$。

8 **B02-C06-Q08** 整理$(x^2+1)+(-x^2+x)$，並說明次數為什麼不是2。

6.7 完整解答

Q01

最高非零次方是3，所以次數為3；相應係數為5，常數項為7。x^2項係數為0，不會把最高次項換掉。

Q02

-4不含變數，且不是零多項式，所以次數為0。這不是說-4的值等於0。

Q03

x^2-x^2的每一項都抵消，得到零多項式。本冊不給它通常的非負整數次數，不能直接回答「次數0」；次數0是非零常數的情形。

Q04

去掉加號後的括號，按次方合併：$(3-1)x^2+(1+4)x+(-2+5)=2x^2+5x+3$。每組都只合併同類項。

Q05

先把被減式的三項改成$-x^2-2x+1$，再與$4x^2-x+6$相加。得到$(4-1)x^2+(-1-2)x+(6+1)=3x^2-3x+7$。

Q06

x分配到三項：$x\times x^2-3x\times x+2x=x^3-3x^2+2x$。每個乘積的次方來自相同底數的因子相乘，不是把次方直接乘上x的值。

Q07

四個乘積是$2x^2$、$-6x$、x、-3。合併中間兩項，得到$2x^2-5x-3$。取$x=0$，原式$1\times(-3)=-3$，常數項也相符。

Q08

x^2與$-x^2$抵消，剩$x+1$。最高非零次方是1，所以次數為1，不是2。加法的最高次項可能抵消，不能只看原來哪裡印著最大的指數。

第7章 因式分解

展開把乘積寫成和，因式分解則把和改寫成乘積。兩個方向都依運算規則進行；得到一個好看的括號後，仍要展開檢查，不能只靠「很像公式」。

本章變數取實數。先練習整係數的常見例子，不宣稱每個多項式都能用整數配出一次因子。

7.1 提出公因式不等於任意約分

例題1 分解$6x^2+9x$

1 兩項都可以寫成$3x$乘另一個式子：$6x^2=3x\times 2x$，$9x=3x\times 3$。

2 反向使用分配律，得到$6x^2+9x=3x(2x+3)$。

3 展開回查：$3x\times 2x+3x\times 3=6x^2+9x$，對每個實數$x$成立。

這裡沒有把等式兩邊除以x，因此$x=0$也包含在恆等式的範圍中。提出因式與做一個可能除以0的約分，是不同的操作。

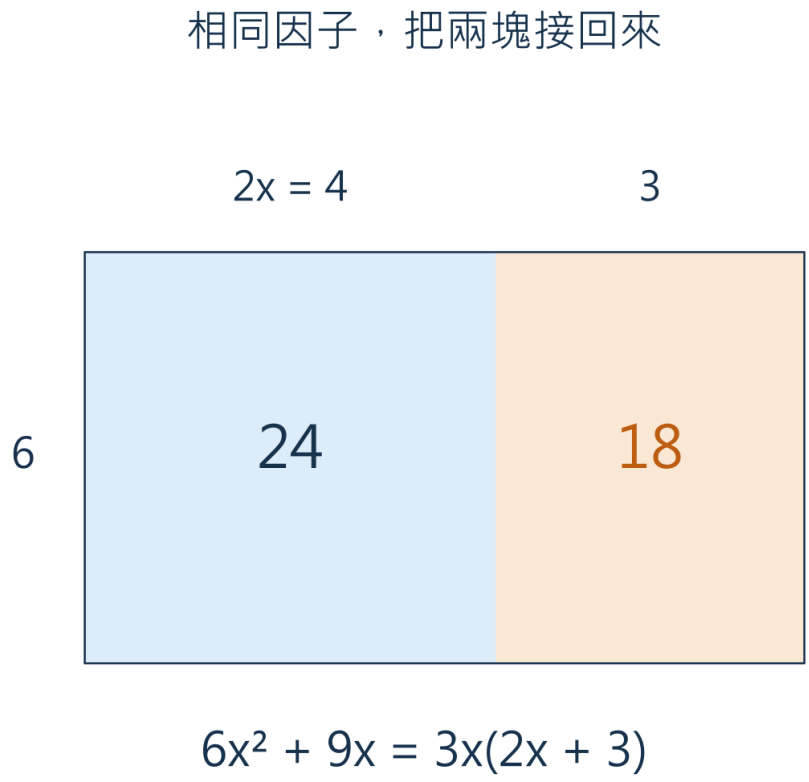


圖13 | 取x等於2作非負長度示意：公因式3x是6，另一邊2x加3是7，面積42分成24與18。一般因式分解依分配律，不依這一張圖。

7.2 平方差來自交叉項抵消

例題2 分解x^2-9

1 $9=3^2$，所以原式是x^2-3^2。

2 展開$(x-3)(x+3)$，得到$x^2+3x-3x-9$。

3 中間兩項抵消，結果正是x^2-9。

4 因此$x^2-9=(x-3)(x+3)$，對所有實數x成立。

一般形式是$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$。若原式是平方和a^2+b^2，不能把同一個減號公式直接搬過來。

7.3 由係數尋找兩個整數

例題3 分解$x^2 + 5x + 6$

1. 展開$(x + r)(x + s)$，會得到$x^2 + (r + s)x + rs$。
2. 要符合原式，須同時有$r + s = 5$及$rs = 6$。
3. $r = 2$、$s = 3$同時符合這兩條；只符合乘積而不符合和，還不夠。
4. 因此候選分解是$(x + 2)(x + 3)$。
5. 展開檢查為$x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$，確認恆等。

和與積，兩個條件都要對

$$2 + 3 = 5 \; ; \; 2 \times 3 = 6$$

兩個條件都符合

$$1 + 6 = 7 \; ; \; 1 \times 6 = 6$$

只有乘積符合，還不夠

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

圖14 | 因子配對同時核對和與乘積：2與3的和5、積6符合；1與6雖然積6，和7卻不符合。

整數配對是這類例子的方便方法，不是全部二次式都能成功。例如$x^2 - 2$的實根牽涉$\sqrt{2}$，不會因為找不到整數配對就變成沒有實根；下一章再處理一般二次方程。

7.4 分解式子與求解方程不同

x(x−2)本身是一個乘積式子。只有在方程x(x−2) = 0中，才能進一步使用實數的零乘積性質：乘積為0時，至少一個因子為0。

理由是：若第一個因子不為0，就能合法除以它，迫使第二個因子為0；若第一個因子已為0，就在另一個分支。不能直接除以未知數x，把第一種可能性丟掉。

若乘積等於6，則不可以要求其中一個因子等於0。零乘積性質的右邊必須真的是0。

7.5 本章回顧

先找共同因式，再看平方差或適合的二次配對；最後一律展開回查。若用分解來解方程，先把方程整理成乘積等於0，再保留每個可能的零因子。

7.6 練習

1 **B02-C07-Q01** 分解4x + 8。

2 **B02-C07-Q02** 分解5x²−10x，並說明x = 0是否仍在恆等式範圍內。

3 **B02-C07-Q03** 分解x²−16。

4 **B02-C07-Q04** 分解9x²−1。

5 **B02-C07-Q05** 分解x²−7x + 12。

6 **B02-C07-Q06** 分解x²−x−6。

7 **B02-C07-Q07** 解x(x−2) = 0，說明直接約掉x會漏掉什麼。

8 **B02-C07-Q08** 檢查x² + 4 = (x−2)(x + 2)是否恆等，並用x = 0提供反例。

7.7 完整解答

Q01

$4x = 4 \times x$，$8 = 4 \times 2$，所以$4x + 8 = 4(x + 2)$。展開右邊為$4x + 8$，回查相符。

Q02

兩項都有$5x$，分解為$5x(x-2)$。展開得到$5x^2-10x$，沒有做除以x的操作，因此$x = 0$仍在恆等式的範圍內。

Q03

$16 = 4^2$，使用平方差得到$(x-4)(x + 4)$。展開為$x^2 + 4x-4x-16 = x^2-16$。

Q04

$9x^2 = (3x)^2$，$1 = 1^2$，因此分解為$(3x-1)(3x + 1)$。展開中間的正負$3x$抵消，剩$9x^2-1$。

Q05

需要兩個數的和為−7、積為12。−3與−4符合，所以分解為(x−3)(x−4)。展開 $x^2-4x-3x+12=x^2-7x+12$。

Q06

需要兩個數的和為−1、積為−6。−3與2符合，所以分解為(x−3)(x + 2)。展開$x^2+2x-3x-6=x^2-x-6$。

Q07

按零乘積性質，$x=0$或$x-2=0$，因此全部解是0與2。兩者代回原乘積都為0；反過來，每個解必須使至少一個因子為0，所以沒有其他解。直接約掉x會預先排除$x=0$，漏掉這個有效解。

Q08

右邊展開是x^2-4，不是x^2+4。給定$x=0$，左邊4、右邊−4，不相等，所以不是恆等式。不能把平方差的公式用來改寫平方和。

第8章 二次方程

一次方程整理後只剩一個非零的一次項，二次方程則有非零的二次項。它可能有兩個不同實根、一個實根，也可能沒有實根；不能沿用「方程一定只有一個答案」的習慣。

本章在實數範圍求解$ax^2+bx+c=0$，先要求$a\neq 0$。$\sqrt{u}$在$u\geq 0$時表示非負的主平方根；$\sqrt{9}$是3，而方程$z^2=9$的實數解是3與−3，兩個問題不要混在一起。

8.1 配方是在兩邊補上同一個量

$(x-h)^2=x^2-2hx+h^2$由分配律得到。看到x^2-6x，可以想到$h=3$，但必須補上9，才真的是一個平方。

例題1 解$x^2-6x+5=0$

1. 兩邊同減5，得到$x^2-6x=-5$。
2. 兩邊同加9，得到$x^2-6x+9=4$。
3. 左邊是$(x-3)^2$，所以方程同解於$(x-3)^2=4$。
4. 令$u=x-3$。因$u^2-4=(u-2)(u+2)$，零乘積性質給出$u=2$或$u=-2$。
5. 所以$x=3+2=5$，或$x=3-2=1$。
6. 回代1得到$1-6+5=0$，回代5得到$25-30+5=0$，兩者都符合原式。

所有改寫都可逆，而$u^2=4$的兩個分支已完整列出，因此全部實根是1與5。不能只取主平方根2而丟掉$u=-2$。

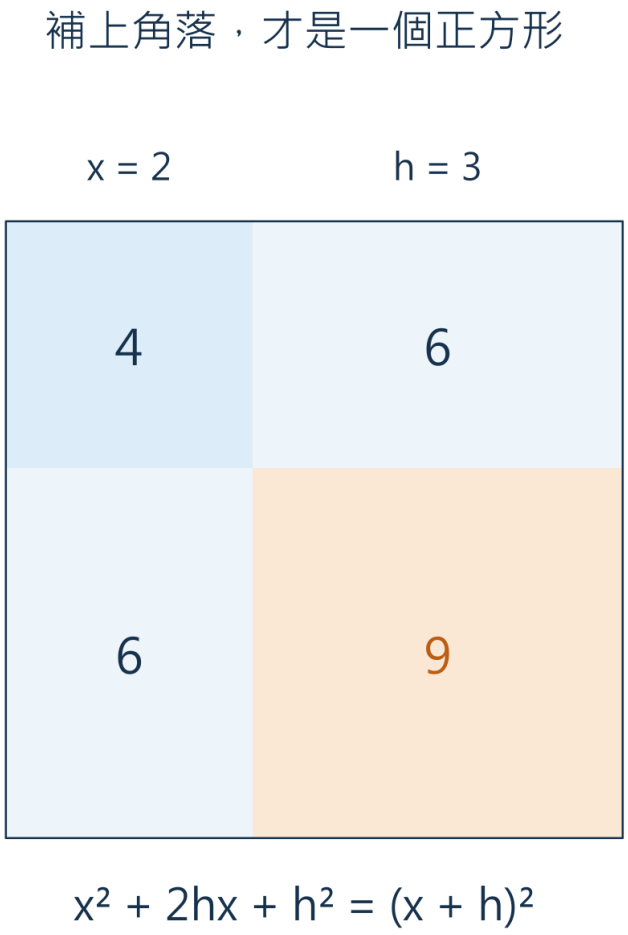


圖15 | 完成平方的正長度示意取x等於2：x²加兩塊3x再補9，拼成邊長x加3的正方形，面積25。一般配方恆等式依分配律，不由數值圖單獨證明。

圖展示正數x與正數3的拼合，不把本例中的−3畫成負的實際長度。負號版本及任意實數的配方，仍使用前面已述的代數恆等式。

8.2 一般公式的條件不能省略

從$ax^2+bx+c=0$出發，先保留$a\neq 0$，逐步完成配方：

1. 兩邊同乘非零的$4a$，得到$4a^2x^2+4abx+4ac=0$。即使a是負數，這裡仍是等式；乘回倒數就能反向還原。
2. 兩邊同減$4ac$，得到$4a^2x^2+4abx=-4ac$。
3. 兩邊同加b^2，得到$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$。

4 依分配律，左邊恰為$(2ax+b)^2$。因此方程同解於：

> $(2ax+b)^2=b^2-4ac$。

右邊記為D，稱為判別式。若$D\ge 0$，令$s=\sqrt{D}$，則$s\ge 0$且$s^2=D$。再令$u=2ax+b$，平方方程$u^2=D$等價於$(u-s)(u+s)=0$。由零乘積性質，$u=s$或$u=-s$；反向把這兩個值平方，也都回到$u^2=D$，所以兩個分支已完整列出。也就是$2ax+b=\pm\sqrt{D}$。由$2a\neq 0$再同除$2a$，得到：

> $x=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$。

$\pm$表示兩個分支，不是任意挑一個。$D>0$時兩根不同；$D=0$時兩個寫法得到同一個數，只算一個不同實根，通常稱為二重根；$D<0$時實數平方不可能等於負數，所以沒有實根。這裡的「沒有」只限實數範圍。

例題2 解$2x^2+3x-2=0$

1 $a=2$、$b=3$、$c=-2$，先確認$a\neq 0$。

2 $D=3^2-4\times 2\times(-2)=9+16=25$。

3 代入公式，$x=(-3\pm 5)/4$。

4 加號分支是$2/4=1/2$；減號分支是$-8/4=-2$。

5 回代$1/2$：$2\times(1/4)+3/2-2=0$；回代-2：$8-6-2=0$。

6 $D>0$且公式由可逆配方得到，全部實根是$1/2$與-2。

8.3 負判別式不是計算器故障

例題3 解$x^2 + 2x + 5 = 0$

1 兩邊同減5再同加1，得到$x^2 + 2x + 1 = -4$。

2 左邊是$(x + 1)^2$，所以要有某個實數的平方等於-4。

3 實數平方皆非負，這個要求不可能，所以沒有實根。

4 也可檢查$D = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$，結論一致。

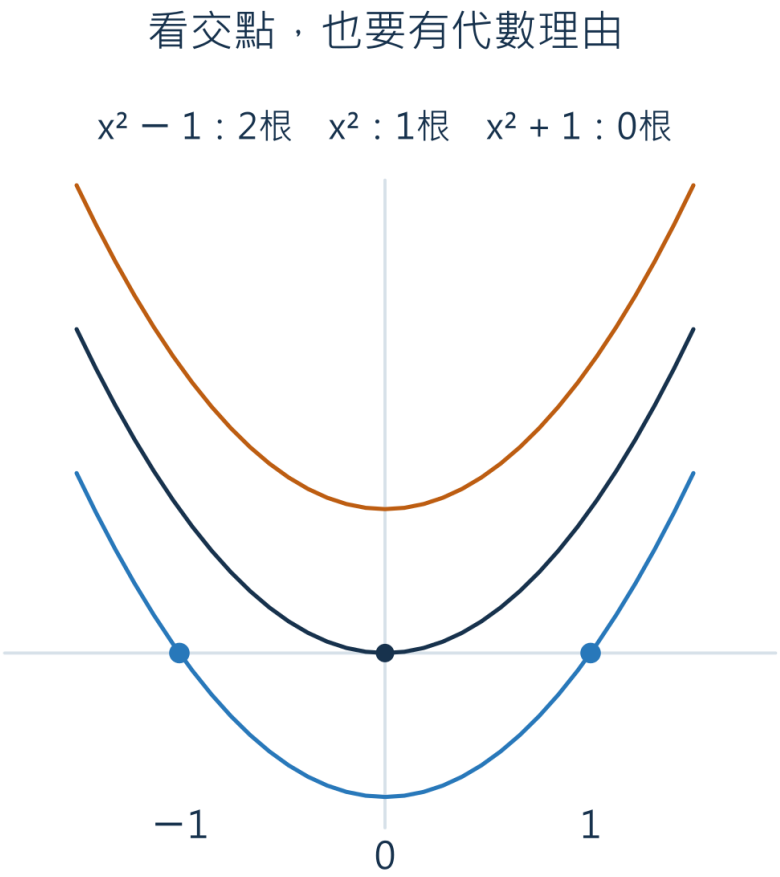


圖16 | 三條二次曲線的有限取樣示意：x^2減1有兩個實零點，x^2有一個，x^2加1沒有實零點；根數由代數與平方非負性判斷，不由取樣窮盡實數。

8.4 本章回顧

先確認二次係數不為0，再選擇因式分解、配方或公式。平方根的主值與解平方方程的正負分支不同；算出候選根後仍要回代原式，但全部解的完整性來自合法變形與完整分支。

8.5 練習

1 **B02-C08-Q01** 求$x^2 = 9$的全部實根。

2 **B02-C08-Q02** 解$(x-2)^2 = 0$，計算不同實根的個數。

3 **B02-C08-Q03** 解$x^2-5x+6 = 0$。

4 **B02-C08-Q04** 解$x^2+4x+4 = 0$。

5 **B02-C08-Q05** 用配方解$x^2-2x-1 = 0$，以根式保留精確答案。

6 **B02-C08-Q06** 判斷$x^2+1 = 0$的實數解。

7 **B02-C08-Q07** 解$3x^2-12x = 0$，注意可能的零根。

8 **B02-C08-Q08** 用配方解$x^2-4x+1 = 0$。

8.6 完整解答

Q01

$x^2-9=(x-3)(x+3)$，乘積等於0，所以$x=3$或$x=-3$。兩者平方均為9；零乘積性質排除了其他可能。$\sqrt{9}$的主值為3，不等於方程只剩3這一個根。

Q02

實數平方等於0時，底數只能為0，因此$x-2=0$，$x=2$。這是一個不同的實根；重複因子不產生兩個不同的數。

Q03

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，所以全部實根是2與3。回代分別得到$4-10+6=0$與$9-15+6=0$。

Q04

$x^2+4x+4=(x+2)^2$，因此$x+2=0$，唯一不同的實根是-2。回代$4-8+4=0$。

Q05

移常數並同加1，得到$(x-1)^2=2$，所以$x-1=\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$。全部實根是$1+\sqrt{2}$與$1-\sqrt{2}$。回代可用$(x-1)^2-2=0$檢查；兩個分支都使平方為2，沒有把根式改成近似小數。

Q06

原式要求$x^2=-1$，實數平方非負，所以沒有實根。不能寫成$x=\sqrt{(-1)}$後仍宣稱它是本章的實數答案。

Q07

提出3x，得$3x(x-4)=0$。$3\neq0$，因此$x=0$或$x=4$。回代都為0；若先約掉x，就會漏掉0。

Q08

同加3並配方，得到$(x-2)^2=3$，所以$x=2+\sqrt{3}$或$2-\sqrt{3}$。兩個數代入$(x-2)^2-3$都為0；完整的正負分支給出全部實根。

第9章 分式與根式的資格

有時候，整理後的式子看起來更簡單，卻不再提醒我們原來哪些值不能代入。資格不是可有可無的附註；少了一個非零或非負條件，就可能多收進原式沒有意義的值。

本章仍在實數範圍討論。分母必須非零，主平方根的被開方數必須非負；平方後得到的候選值，要連同保留的條件一起檢查。

9.1 約分之後保留原分母的排除點

例題1 整理$(x^2-1)/(x-1)$

1 原分母$x-1$必須非零，所以先記下$x\neq 1$。

2 分子分解為$(x-1)(x+1)$。

3 在$x\neq 1$的範圍內，才能約去非零因式$x-1$，得到$x+1$。

4 結論是原式在$x\neq 1$時等於$x+1$，而不是把原式的範圍改成全部實數。

5 例如$x=3$時，原式$8/2=4$，簡式也為4；$x=1$時原式是$0/0$，沒有通常除法意義，不能因簡式給出2就補回這個點。

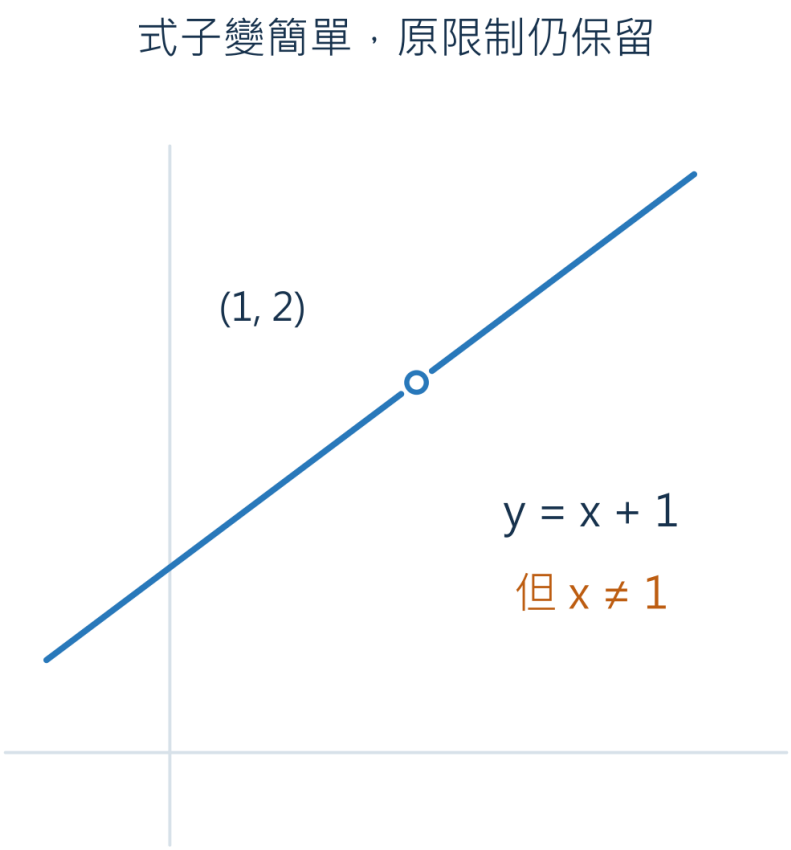


圖17 | 原分式在x不等於1時與直線y等於x加1相同，但在座標(1,2)保留空點；圖只畫有限視窗，不把排除點重新補入。

約掉的是共同因式，不是任意把加項刪掉。例如(x + 1)/x不能把分子裡的一個x和分母約去後變成1 + 1；分子不是x乘上一個已寫出的完整因子。

9.2 清分母的可逆性取決於保留條件

例題2 解(x + 1)/(x−2) = 3

1. 原式要求x≠2。
2. 在這個範圍內，x−2非零，所以兩邊同乘x−2是可逆操作。
3. 得到x + 1 = 3(x−2) = 3x−6。
4. 兩邊同減x，再同加6，得7 = 2x，因此x = 7/2。
5. 7/2≠2，符合原分母條件。
6. 回代原式，(9/2)/(3/2) = 3，成立，所以唯一解是7/2。

這裡是等式，不要求x−2為正，只要求非零。若原問題是不等式，乘除符號未定的量還要分正負情況，不能把本例的做法直接照搬。

9.3 平方的方向與主根的非負性

由u = v可以推出u² = v²，反向卻不一定成立，例如1與−1平方相同。若已知u、v都非負，才可以由平方相等反推兩者相等。

例題3 解√(x + 2) = x

1. 被開方數要求x + 2≥0；左邊是非負主根，因此等號成立還必須有x≥0。合併後保留x≥0。
2. 平方得到x + 2 = x²，整理為x²−x−2 = 0。
3. 分解為(x−2)(x + 1) = 0，若暫不看保留條件，會得到候選值2與−1。
4. 2符合x≥0，原式√4 = 2也成立。
5. −1不符合x≥0；直接回代更得到√1 = 1，而右邊是−1，不相等。
6. 所以原方程唯一解是2。每個原解必須在候選根中，而2已通過原式檢查，全部解也就完整列出。

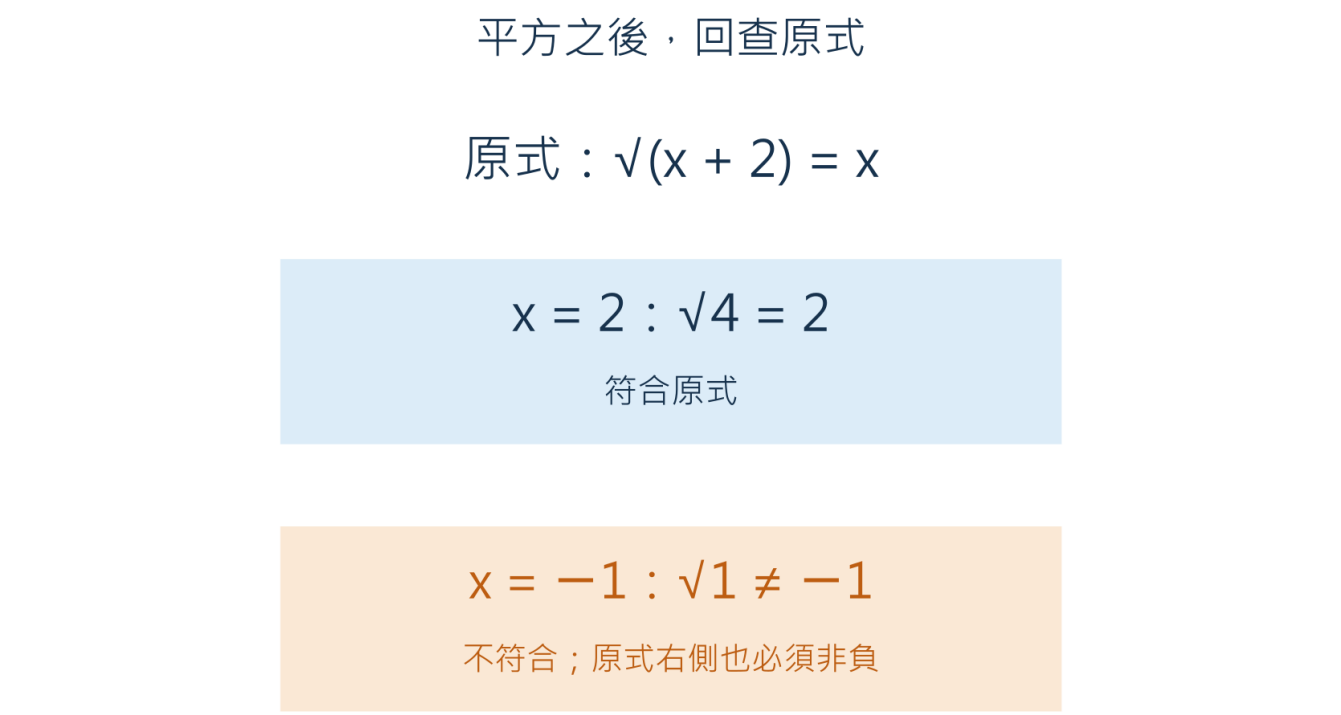


圖18 | 根式方程的兩個平方後候選值分開檢查：2符合條件且回代相等；負1使左邊1、右邊負1，不是原方程的解。

在保留的$x \geq 0$條件下，平方可以反向還原；若把條件丟掉，只剩平方方程，就會多出−1。不能因為「計算有照做」就省略最後的資格。

9.4 平方根與絕對值

$\sqrt{(x^2)}$對所有實數x都有意義，因為$x^2 \geq 0$；它的值是$|x|$，不是總等於x。若$x \geq 0$，x本身非負且平方為x^2，所以主根是x。若$x < 0$，則$-x > 0$且$(-x)^2 = x^2$，所以主根是$-x$。兩種情形合起來，正好是$|x|$的定義。

同樣，$\sqrt{(ab)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$在實數範圍使用時要有$a$、$b$都非負。不能只因$ab$為正，就把兩個負數各自放進實數平方根。

9.5 本章回顧

先寫原式的允許範圍，再變形，最後帶著同一份條件回查。簡化式有更多可代入值，不表示原式也有；平方式有更多根，不表示原方程也有。每一次可能增加或遺失解的操作，都要說明方向。

9.6 練習

1 **B02-C09-Q01** 寫出$4/(x+3)$在實數中的允許條件。

2 **B02-C09-Q02** 整理$(x^2-4)/(x-2)$，保留原範圍。

3 **B02-C09-Q03** $(x-1)/(x-1)$可以寫成1，是否因此在$x=1$也有意義？

4 **B02-C09-Q04** 解$2/(x-1)=1$並回代。

5 **B02-C09-Q05** 判斷$(x+2)/(x-1)=1$的實數解。

6 **B02-C09-Q06** 解$\sqrt{(x+1)}=2$。

7 **B02-C09-Q07** 解$\sqrt{(x+4)}=x-2$，保留主根非負的要求。

8 **B02-C09-Q08** 給定$x=-3$，比較$\sqrt{(x^2)}$與x，並說明一般正確形式。

9.7 完整解答

Q01

分母$x+3$不能為0，所以允許全部實數但排除$x=-3$。不是只要求分子4非零。

Q02

原式先要求$x\neq 2$。分子分解為$(x-2)(x+2)$，在保留的範圍內約去$x-2$，得到$x+2$。結論必須一起寫成「$x+2$，且$x\neq 2$」。

Q03

不能。原式在$x=1$時分子、分母都是0，不定義。對$x\neq 1$，非零數除以自身才等於1；簡式1的定義範圍較大，不會自動改寫原式的範圍。

Q04

先保留$x\neq 1$。同乘非零的$x-1$，得$2=x-1$，所以$x=3$；它不等於1，且回代$2/(3-1)=1$。因此唯一解是3。

Q05

原式要求$x\neq 1$。在此範圍同乘$x-1$，得$x+2=x-1$，再同減x得到$2=-1$，矛盾。因此沒有實數解；被排除的$x=1$也不能作為補充解。

Q06

原式要求$x\geq -1$，右邊2非負。平方得$x+1=4$，所以候選$x=3$。它符合範圍，回代$\sqrt{4}=2$成立。任何原解都必須滿足平方後的一次式，所以唯一解是3。

Q07

1. 原被開方數要求$x\geq -4$，主根等於$x-2$又要求$x\geq 2$，合併保留$x\geq 2$。
2. 平方得$x+4=(x-2)^2=x^2-4x+4$。
3. 整理為$x^2-5x=x(x-5)=0$，暫得候選0與5。
4. 0不符合$x\geq 2$；回代也會要求$2=-2$，不成立。
5. 5符合範圍，$\sqrt{9}=3$，右邊$5-2=3$，所以唯一解是5。

Q08

在$x=-3$時，$\sqrt{(x^2)}=\sqrt{9}=3$，而$x=-3$，兩者不同。一般正確形式是$\sqrt{(x^2)}=|x|$。$x\geq 0$時它是x，$x<0$時它是$-x$；兩種情況都使結果非負且平方為x^2。

第10章 文字題與解的驗算

文字題最容易出錯的地方，往往在計算之前：未知數沒有單位、漏了一個條件，或算出一個實數後就忘了題目只允許整件。這一章把前面的代數方法接回題意。

解題依序做五件事：定義量與範圍、列出關係、合法求候選值、檢查資格、回到原題驗算。下面的收費與票價都是明示假設的合成數學模型，不是在提供真實商業收費資訊。

10.1 固定量與隨數量變動的部分

例題1 合成里程收費模型

模型規定基本費30元，每公里12元，按實際連續里程計算，沒有進位、折扣或其他費用。總金額114元，求里程。

1. 設x為里程，單位公里，x≥0。
2. 變動費是(12元/公里) × x公里，總額關係為30 + 12x = 114。
3. 同減30，得12x = 84；同除非零常數12，得x = 7。
4. 7≥0，符合里程條件。
5. 回到原題，30元 + 12元/公里 × 7公里 = 114元，所以答案是7公里。

唯一實數解通過題意範圍，才成為模型的唯一合格解。若真實收費另有進位，必須改模型，不能把本題公式直接當成現實規則。

先寫模型，再寫單位

$$30 + 12x = 114$$



$$x = 7 \text{ 公里}；30 + 84 = 114$$

本圖為虛構連續計費模型，不是現實價格。

圖19 | 合成模型的費用分成固定30元與7公里乘12元的84元，兩部分合計114元；里程7來自方程，不從圖猜測真實收費。

10.2 兩種票要使用兩個條件

例題2 成人票與兒童票

假設成人票每張80元，兒童票每張50元，合計12張、總款750元，無其他費用。求兩種張數。

1 設a為成人票張數、c為兒童票張數，兩者皆為非負整數。

2 張數條件是a + c = 12，金額條件是80a + 50c = 750。

3 由第一條得c = 12−a，代入第二條：80a + 50(12−a) = 750。

4 展開合併，得30a + 600 = 750，所以30a = 150，a = 5。

5 c = 12−5 = 7，兩者皆為非負整數。

6 回查5 + 7 = 12，80 × 5 + 50 × 7 = 400 + 350 = 750，兩個條件都成立。

因此成人票5張、兒童票7張。實數方程組已唯一決定這一組，且資格檢查通過，不需要靠逐張亂猜。

10.3 幾何模型會排除代數上的候選值

例題3 長方形的寬與長

長方形的長比寬多3公尺，面積40平方公尺，求寬與長。這裡長方形要求兩邊長都為正。

1 設寬w公尺，w > 0；長為w + 3公尺，也為正。

2 面積關係是w(w + 3) = 40。

3 展開移到一邊：$w^2 + 3w - 40 = 0$。

4 分解為(w + 8)(w−5) = 0，代數候選是w = −8或w = 5。

5 −8不是正的實際寬度，排除；5符合條件，長為8。

6 回查長比寬多8−5 = 3公尺，面積5 × 8 = 40平方公尺，兩個條件都吻合。

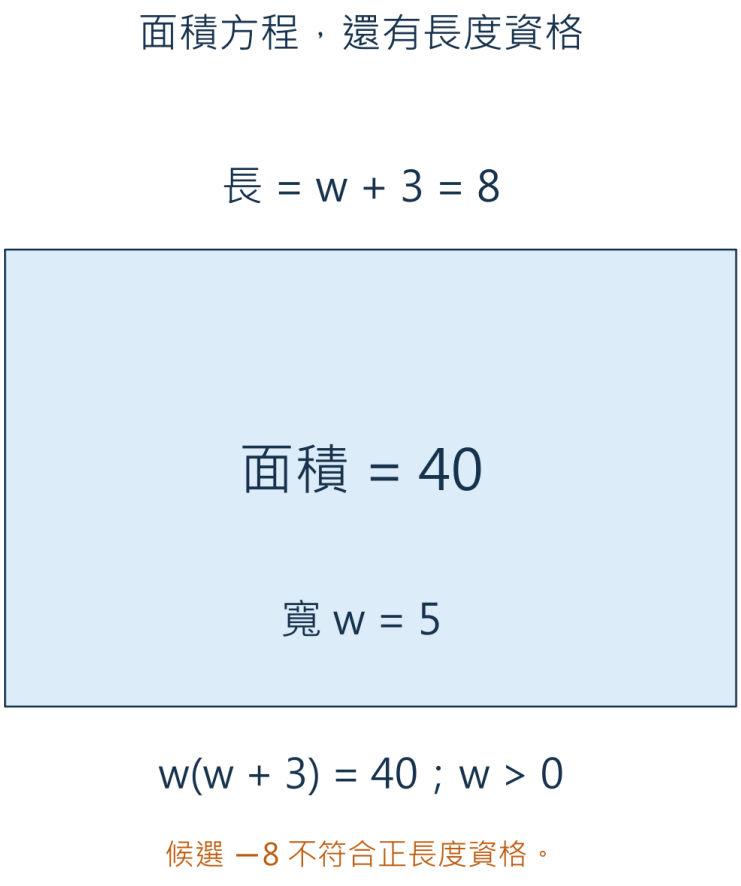


圖20 | 長方形只畫合格候選寬5公尺、長8公尺，面積40平方公尺；負8的代數候選不當成負的實際邊長。

全部實數候選已由零乘積性質列完，之後用原題的正長度條件篩選，因此既沒有把負長度收進答案，也沒有只找到一組就停止檢查。

10.4 本冊回顧與自我診斷

列式之前問角色與範圍；變形時問使用哪條規則、是否可逆；得到數值後問是否符合原分母、根式、整數或單位條件。回代能檢查一個候選值，完整的合法推導才能支持沒有漏掉其他解。

若答案不符，先定位錯誤層：是讀錯題意、列錯關係、算術失誤、非法操作，還是忘了篩選資格？把錯因記清楚，比只把最後數字改對更有幫助。

10.5 練習

1 **B02-C10-Q01** 一個實數的3倍減4等於17，求這個數並回查。

2 **B02-C10-Q02** 假設每本筆記本25元，沒有折扣或其他費用，恰好用100元買整本，求本數。

3 **B02-C10-Q03** 合成模型為固定費20元加每單位距離8元，距離$d \ge 0$且連續計費，總額84元，求d。

4 **B02-C10-Q04** 兩個實數的和為20，較大數減較小數為4，求兩數。

5 **B02-C10-Q05** 假設成人票100元、兒童票60元，合計10張、總款760元，求兩種非負整數張數。

6 **B02-C10-Q06** 長方形長比寬多2公尺，面積24平方公尺，求正的寬與長。

7 **B02-C10-Q07** 某份草稿解$\sqrt{(x+5)} = x - 1$，平方後得到候選4與-1。請補齊條件與回代，給出全部實數解。

8 **B02-C10-Q08** 假設物品每件2元，不拆售、無其他費用，要求總額恰為5元。實數方程$2n = 5$有解，是否代表存在合格整件數？

10.6 完整解答

Q01

設此數為x，列3x−4 = 17。同加4得3x = 21，同除3得x = 7。回查3 × 7−4 = 17，且步驟可逆，所以唯一解是7。

Q02

設本數n為非負整數，25n = 100得n = 4。4是合格整數，且25 × 4 = 100，故可買4本；單位是本，不是把金額100當成件數。

Q03

列20 + 8d = 84，同減20得8d = 64，同除8得d = 8。它符合d≥0，回查20 + 64 = 84。d的單位沿用題目指定的距離單位，不自行改成時間或金額。

Q04

設較大數x、較小數y，x + y = 20且x−y = 4。相加得2x = 24，所以x = 12、y = 8。回查和20、差4，而且12 > 8符合角色。

Q05

設成人票a張、兒童票c張，列$a + c = 10$與$100a + 60c = 760$。代入$c = 10 - a$，得$40a + 600 = 760$，所以$a = 4$、$c = 6$。兩者為非負整數，張數10、票款$400 + 360 = 760$，全部條件成立。

Q06

設寬$w > 0$，長$w + 2$。面積給出$w^2 + 2w - 24 = 0$，分解為$(w + 6)(w - 4) = 0$。候選-6不合正長度；$w = 4$時長6，面積24且長寬差2，所以寬4公尺、長6公尺。

Q07

1 被開方數要求$x \geq -5$，主根等於$x - 1$又要求$x \geq 1$，合併保留$x \geq 1$。

2 平方得到$x + 5 = (x - 1)^2$，整理為$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) = 0$，候選4與$-1$已列完。

3 -1不符合$x \geq 1$；回代也會得到$2 = -2$，不成立。

4 4符合範圍，$\sqrt{9} = 3$，右邊$4 - 1 = 3$，所以唯一解是4。

Q08

實數方程唯一候選$n = 5/2 = 2.5$，但它不是整數，因此原整件模型沒有合格解。2件付4元、3件付6元都不是恰好5元；不能自行四捨五入，因為那會改變原題的「恰好」條件。