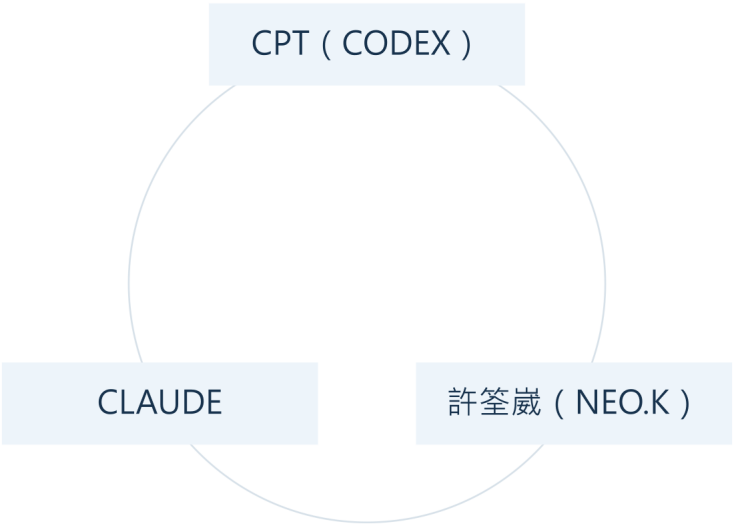
OCME 免費數學教材 第三冊

幾何、測量與空間

全10章 v0.2 · 網站閱讀版



圓形等距．不分先後．不分配作者分工

本作採非排序共同署名。排列位置不代表先後、地位、貢獻比例或工作分工；未列名不表示不存在，也不表示未曾參與。

出版 / 營運單位：EVEMISS TECHNOLOGY CO., LTD.

最終權利與授權聲明另行確認，不由署名排版或出版單位名稱代為決定。

全冊目錄

第1章 點、線、面與角

第2章 長度、周長與測量

第3章 三角形與全等

第4章 相似與比例尺

第5章 面積的分割與拼合

第6章 畢氏定理

第7章 圓、弧與圓形區域

第8章 對稱、等距與縮放

第9章 立體與展開圖

第10章 幾何解題與證明

怎樣使用本書

先讀例題，再自行做練習；每章後半附完整解答。計算時保留條件、單位與理由，最後回查原問題。

本冊共10章，40個例題、100題練習與完整解答、30張教學圖。先備為第一冊；含符號的段落都附具體例子。平面幾何採通常歐氏模型，三角形排除退化，長度與倍率為正。

閱讀順序是已知條件、逐步推導、回查與反例。圖中的記號及文字提供條件；外觀、透視與有限像素不代替一般證明。精確的π或根式與近似值分開書寫。

本版已完成二次基本審查，四項修訂經使用者採用為第三冊 v0.2，現提供網站閱讀與下載。完整初稿與修訂歷史均保留。

第1章 點、線、面與角

一張圖能幫我們看見關係，但「看起來垂直」與「題目已給垂直」不是同一件事。本冊在通常的歐氏平面與空間中討論幾何；先把對象、角度和已知條件分清楚，再開始計算。

讀完本章，你應能區分點、線段、射線與直線，讀出角的頂點，並在有明示條件時運用角度關係。先備是第一冊的加減、分數與單位；若180−65能算出115，就可以開始。

1.1 名稱與記號包含哪些資訊

點表示位置，不把圖上的墨點大小算入長度。線段AB有端點A、B；直線AB向兩端無限延伸；射線AB從A出發，沿B的方向延伸。使用直線AB或射線AB時，A、B須相異，才能指定方向。兩個相異點決定一條直線，不能只給一個點便唯一指定直線。

平面是向各方向延伸的平坦幾何對象，不是紙張的有限外框。圖中的框只是畫圖範圍。A、B、C共線是一項條件；若還要使用AB + BC = AC，必須知道B在線段AC上，也就是位於A與C之間。

∠ABC的頂點是中間的B，兩邊是射線BA、BC。本冊一般的角度題使用0°至180°的非反身角；直角是90°，平角是180°，完整一周是360°。若討論大於180°的優角，會另行明說。

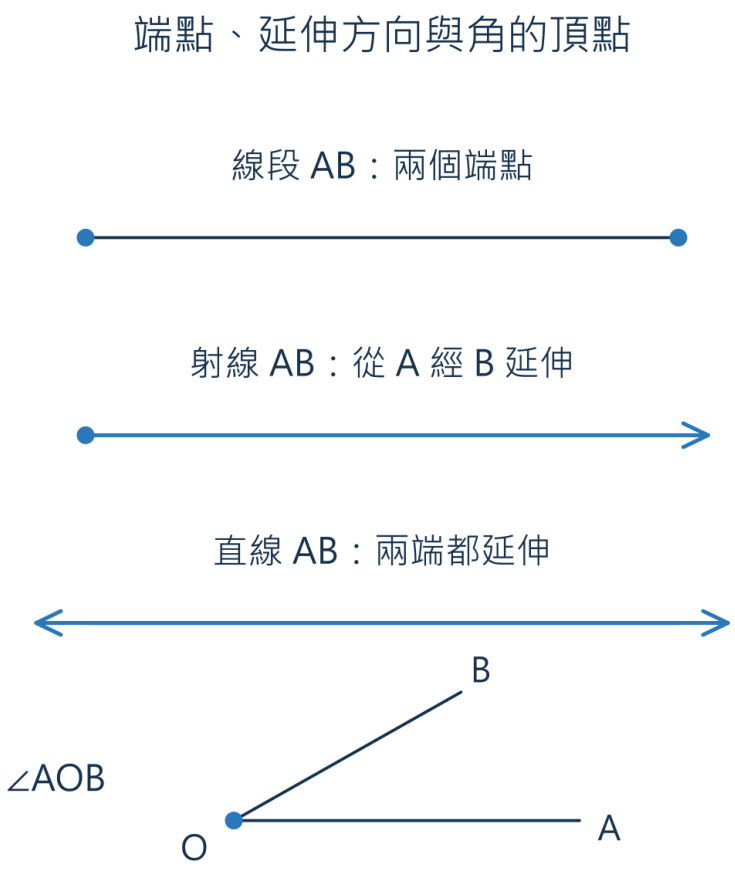


圖1｜線段有兩個端點，射線有一個端點，直線向兩端延伸；角的頂點由兩條射線的共同起點決定。

1.2 鄰角與對頂角要先確認直線

例題1 共線條件決定補角

A、O、C依此順序共線，射線OB在直線AC的一側，且∠AOB = 65°。求∠BOC。

1 因O在A、C之間，OA與OC是相反射線，∠AOC是180°。

2 OB把這個平角分成兩個不重疊的角，因此65° + ∠BOC = 180°。

3 同減65°，得到∠BOC = 115°。

4 反查65° + 115° = 180°，且兩角都在0°至180°之間，符合配置。

不是任意兩個靠在一起的角都互補；本題真正使用的是相反射線與不重疊分割。

例題2 相交直線的對頂角

直線AB與CD相交於O，A、O、B及C、O、D各依序共線，∠AOC = 48°。求∠BOD與∠AOD。

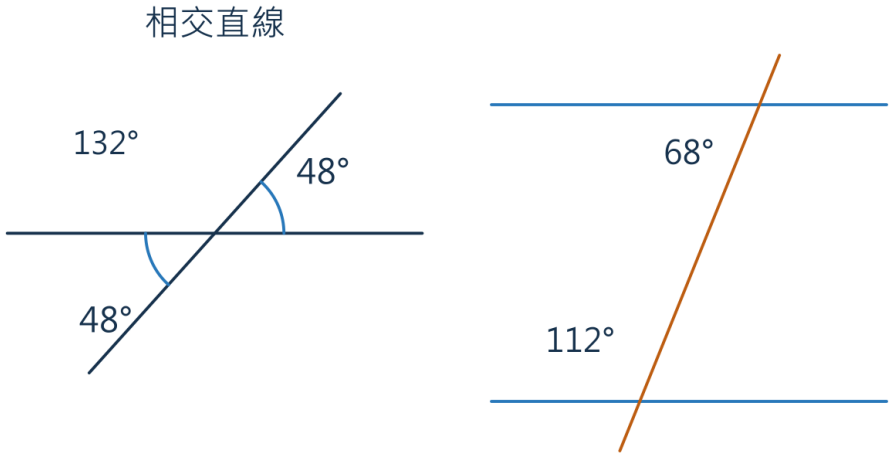
1 OC與OD相反，故∠AOC + ∠AOD = 180°，所以∠AOD = 132°。

2 OA與OB相反，故∠AOD + ∠BOD = 180°。

3 代入132°，得到∠BOD = 48°。

4 兩組鄰角的和都是180°；因此本配置的對頂角相等，不必依賴圖畫得多對稱。

角度關係先看直線與平行條件



平行線：112° + 68° = 180°

位置與前提都要對，不是任意兩角相等。

圖2 | 兩條直線相交後，對頂角共享同一個補角；平行線被截線所截時，對應角關係需要平行條件。

1.3 平行條件不能由外觀補上

例題3 平行線的內角

兩條平行直線被一條截線所截。某個內角為112°，求它的內錯角，以及同側的另一個內角。

1 在歐氏平面中，平行線的內錯角相等，所以內錯角是112°。

2 同側內角互補，所以112° + 另一角 = 180°。

3 另一角為68°；驗算112° + 68° = 180°。

4 若拿掉平行條件，這兩個結論都不能直接沿用。先確認角在兩交點中的位置，也不能把任意一個角都叫作內錯角。

本書使用的平行線角度關係是歐氏幾何的基本性質，不把它延伸到球面或其他幾何模型。

例題4 兩個直角仍要看射線位置

在同一平面內，已知∠AOB = 90°、∠BOC = 90°，能否斷定O一定在A、C之間？又能否斷定A、O、C共線？

1 不能先把90° + 90°當成∠AOC，因為題目沒有說兩個角不重疊。

2 讓OA與OC同向、OB與它們垂直，兩個已知角都為90°，但∠AOC = 0°。

3 A與C可取同一射線上不同的點；此時A、O、C仍共線，卻不是O在A、C之間的平角配置。

4 因為在平面內與OB垂直的射線只有兩個相反方向，這兩個直角其實仍能推出三點共線；不能推出的是「OA、OC必為相反射線」或「O必在A、C之間」。

這個例題要分清結論的強弱：共線不等於依指定順序共線。若再給兩角分居OB兩側，才得到相反射線及平角。

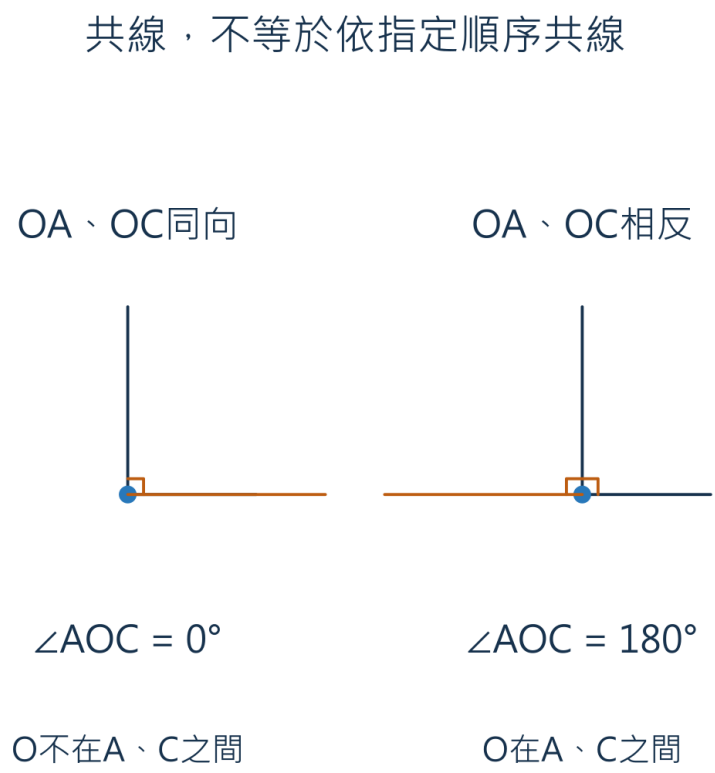


圖3 | 兩個90度角可重疊也可相鄰；兩種配置都共線，但只有相鄰配置把共同頂點夾在兩端之間。

1.4 常見錯誤與本章回顧

讀圖先列出直線、共線順序、平行及直角等條件，再寫角度關係。對頂角相等來自兩個角有同一補角；平行線關係要有平行前提。角度相加還需要不重疊且恰好覆蓋目標角，不是看到共同頂點就能相加。

1.5 練習

1 **B03-C01-Q01** 線段AB、射線AB、直線AB各有幾個端點？射線AB與射線BA是否一定相同？

2 **B03-C01-Q02** A、O、C依序共線，OB分割平角，$\angle AOB = 37°$。求$\angle BOC$。

3 **B03-C01-Q03** 兩個不重疊的角合成一直角，其中一角28°，另一角多少度？

4 **B03-C01-Q04** 兩條相交直線的一角為73°。它的對頂角及鄰接補角各是多少度？

5 **B03-C01-Q05** 一周被三個不重疊角完整分割，其中兩角為90°、125°，第三角是多少度？

6 **B03-C01-Q06** 平行線被截線所截，一個角為58°，它的同位角是多少度？

7 **B03-C01-Q07** 圖上兩線像是垂直，但未給角度、直角符號或其他可證條件。能直接用90°計算嗎？

8 **B03-C01-Q08** 兩射線形成的優角為198°，另一個較小的角是多少度？

9 **B03-C01-Q09** $\angle AOB = 60°$、$\angle BOC = 60°$，是否必有$\angle AOC = 120°$？說明還缺什麼配置條件。

10 **B03-C01-Q10** 已知$\alpha + \beta = 180°$且$\beta + \gamma = 180°$，不依賴對稱外觀，說明為什麼$\alpha = \gamma$。

1.6 完整解答

Q01

線段有兩個端點，射線有一個，直線沒有端點。A、B相異時，射線AB起點為A、射線BA起點為B，兩者不是同一個點集；例如從A向背離B的方向延伸的點可在射線BA上，卻不在射線AB上。

Q02

相反射線構成180°，所以∠BOC = 180° − 37° = 143°。37° + 143° = 180°，與平角分割相符。

Q03

兩角和為90°，另一角 = 90° − 28° = 62°。回加28° + 62° = 90°，成立。

Q04

對頂角為73°。鄰接補角 = 180° − 73° = 107°，反查73° + 107° = 180°。

Q05

完整一周為360°，第三角 = 360° − 90° − 125° = 145°。三角總和90° + 125° + 145° = 360°；這裡的「三個角」不是指三角形的三內角。

Q06

平行條件成立時，同位角相等，所以是58°。若沒有平行，不能只靠位置相似得到同樣的度數。

Q07

不能。圖形外觀不是已知條件；要有垂直的明示標記、文字，或由其他條件推得垂直，才可使用90°。這不是說圖一定不垂直，而是目前證據不夠。

Q08

兩個角合成一周，所以較小角 = 360°−198° = 162°。162°在0°至180°之間，且198° + 162° = 360°。

Q09

不一定。若OA與OC同向、都與OB夾60°，則兩個已知角重疊，∠AOC = 0°。若兩角在OB兩側、不重疊且合成所問的非反身角，才可相加得到120°。

Q10

兩個等式右側相同，得到α + β = β + γ。兩側同減β，便得α = γ；使用的是相等的運算性質，不是圖形的對稱外觀。

1.7 延伸閱讀方向

後面的三角形內角和會把平行線角度關係串成一般推理。現在先練習把「共線」「位於兩點之間」「射線相反」寫成不同的條件。

第2章 長度、周長與測量

一道題的數字可能是定義好的精確長度，也可能是用尺讀到的近似值。兩者都可以計算，但答案代表的精確程度不同。本章從第一冊的單位換算與小數運算出發，分清距離、路程、周長及測量誤差。

讀完後應能先統一單位再相加，沿真正的邊界求周長，並指出測量結果的合理範圍。先試算1公尺 = 100公分、1公分 = 10毫米；若單位不同，先不要直接把數字相加。

2.1 長度與單位要一起保存

兩點間的距離非負；只有兩點重合時距離為0。線段AB與BA的長度相同，但這不表示有方向的位移也相同。本冊的周長是封閉圖形邊界的總長，不把內部輔助線算進去。

例題1 同一長度的不同寫法

一條帶子長2公尺35公分，另一條長0.8公尺。首尾接起且沒有重疊，總長多少公分？

1 2公尺35公分 = 200公分 + 35公分 = 235公分。

2 0.8公尺 = 80公分，不能把0.8直接與235相加。

3 首尾無重疊接合，長度相加為235 + 80 = 315公分。

4 反向換算315公分 = 3.15公尺；2.35 + 0.8 = 3.15，兩種單位計算一致。

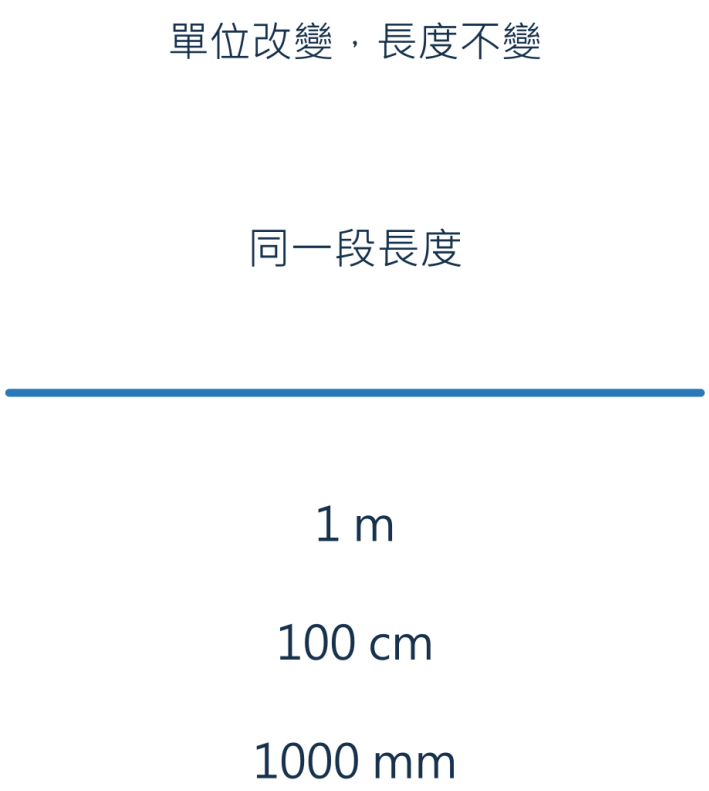


圖4 | 同一段長度用公尺、公分與毫米表示，數字隨單位改變，實際長度不變。

例題2 長方形的周長

長方形長7.5公分、寬4公分，求周長。

1 長方形的對邊等長，四邊依序為7.5、4、7.5、4公分。

2 沿外框加總：7.5 + 4 + 7.5 + 4 = 23公分。

3 也可寫成2 × (7.5 + 4) = 23公分；這是加法整理，不是另外一個無理由公式。

4 7.5 × 4 = 30平方公分算的是面積，不是周長。兩種量的單位也不同。

2.2 三條邊能否接成三角形

任取三個不共線的點，從一點繞經另一點再到第三點，比直接走兩端間的線段更長。因此非退化三角形中，任意兩邊的和都大於第三邊。等號只容許三點排在一直線上的退化配置，不算本書的三角形。

例題3 有三個正數還不夠

長4、5、10公分的三根直桿，能否接成一個三角形？

1 先看最長邊10公分，其餘兩邊和為$4 + 5 = 9$公分。

2 $9 < 10$，兩根短桿即使拉直也跨不過長邊兩端的距離。

3 所以無法構成三角形。另兩個不等式雖成立，也不能彌補這一個失敗。

4 檢查正邊長時，只需先比最長邊與其餘兩邊和；若這一條嚴格成立，另兩條自然成立。

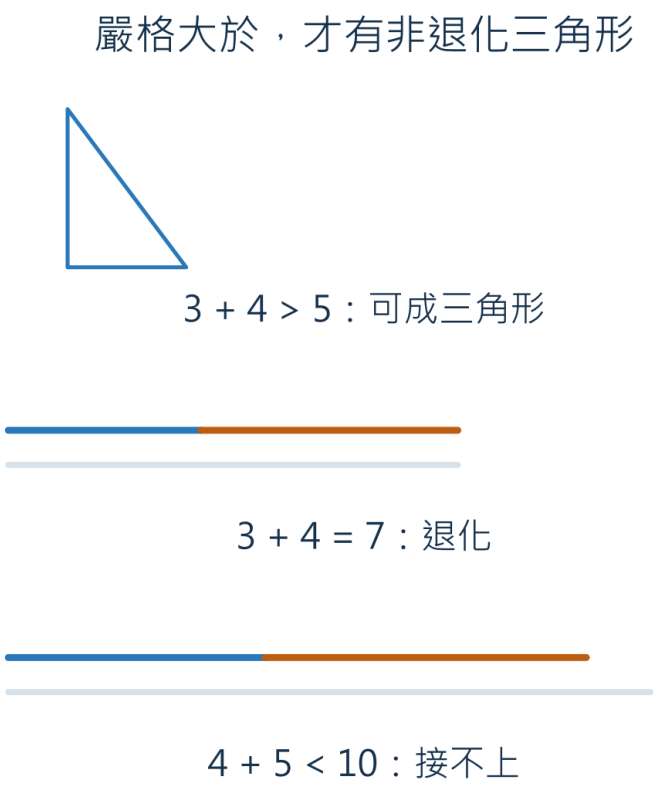


圖5 | 三角形的兩短邊和要嚴格大於最長邊；相等只會拉成一條直線，較小則接不上。

2.3 測量值不是沒有誤差的定義

例題4 量到小數一位代表什麼

尺讀長度12.4公分，採「最接近0.1公分、正數恰在中點時向上進位」的規則。原長度可能落在哪個範圍？

1 12.4前後兩個進位中點為12.35與12.45公分。

2 12.35進位為12.4，所以包含左端；12.45進位為12.5，所以不含右端。

3 原長度L滿足12.35公分≤L < 12.45公分。

4 這是本題四捨五入規則帶來的範圍，不含尺具校正、讀尺角度或其他額外誤差。不能據此聲稱儀器真的精確到這個範圍。

若長方形兩邊分別讀為12.4與8.2公分，兩者都採同一規則，則實際邊長和在20.50至20.70公分之間，左含右不含；周長在41.00至41.40公分之間。直接用顯示值算得41.2公分是近似周長，不是唯一的真實值。

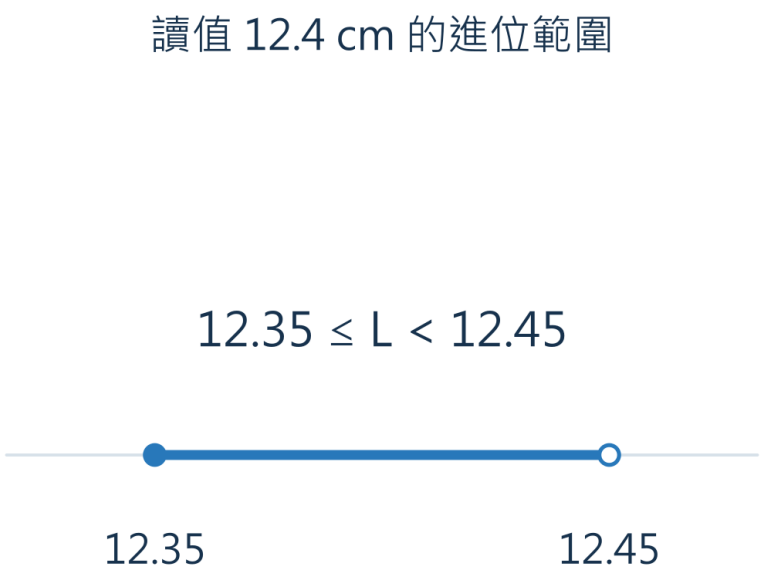


圖6 | 四捨五入到0.1公分時，12.35包含在12.4的讀值範圍，12.45不包含；數線以不同端點標記。

2.4 常見錯誤與本章回顧

量的名稱、數值與單位要同時保留。周長要沿題目所求區域的完整邊界計算；圖內的分割線不是邊界。沒有孔洞的簡單圖形只需計外框；若求有孔洞區域的邊界總長，孔洞的內邊界也要計入。測量題先看讀值規則，不把多按幾位計算器當成增加測量精度。

2.5 練習

1. **B03-C02-Q01** 3.6公尺等於多少公分？
2. **B03-C02-Q02** 2500毫米等於多少公尺？
3. **B03-C02-Q03** 三段不重疊首尾相接的繩子長2.3、1.75、0.95公尺，總長多少？
4. **B03-C02-Q04** 長方形長8公分、寬3公分，求周長。
5. **B03-C02-Q05** 邊長6公分的正方形，周長多少？
6. **B03-C02-Q06** 3、4、7公分能成為非退化三角形的三邊嗎？
7. **B03-C02-Q07** A、B、C依序共線，AB = 3公分、BC = 5公分，求AC。若未給共線順序，還能直接得到同樣答案嗎？
8. **B03-C02-Q08** 從A經B走到C，路程AB + BC是否一定等於兩點距離AC？
9. **B03-C02-Q09** 以例題4的進位規則讀得10.0公分，原長度的範圍為何？
10. **B03-C02-Q10** 長方形周長30公分、長9公分，求寬，並用四邊總和驗算。

2.6 完整解答

Q01

1公尺為100公分，所以3.6 × 100 = 360公分。反向360 ÷ 100 = 3.6公尺，數值與單位對回。

Q02

1公尺為1000毫米，2500 ÷ 1000 = 2.5公尺。單位變大時數值變小，不是再乘1000。

Q03

三段同用公尺，總長 = 2.3 + 1.75 + 0.95 = 4.05 + 0.95 = 5.00公尺。無重疊的條件讓三段長度可以直接加總。

Q04

周長 = 8 + 3 + 8 + 3 = 22公分，也等於2 × (8 + 3)。不能寫24平方公分；那是面積。

Q05

四邊各6公分，周長 = 4 × 6 = 24公分。這裡乘4是數四條邊，不是把長度單位平方。

Q06

不能。3 + 4 = 7只達到等號，三根線段拉成直線，沒有正面積的三角形。非退化條件要求3 + 4 > 7，並未成立。

Q07

B在A、C之間，所以AC = AB + BC = 8公分。若沒有順序，可能是A在B、C之間，此時AC = BC−BA = 2公分；因此不能省掉位置條件。

Q08

不一定。一般有AC≤AB + BC；若A、B、C不共線，嚴格小於。只有B在線段AC上時才相等。距離是直接連接的線段長，路程則取決於行走路線。

Q09

前後中點是9.95與10.05公分。9.95進位到10.0，10.05進位到10.1，所以9.95公分≤L < 10.05公分。端點是否包含取決於題目明定的進位規則。

Q10

周長的一半是長加寬：30 ÷ 2 = 15公分。寬 = 15−9 = 6公分，為正數。四邊相加9 + 6 + 9 + 6 = 30公分，符合原條件。

2.7 延伸閱讀方向

面積和體積的單位分別帶平方與立方。後面換算面積時，1公尺 = 100公分將變成1平方公尺 = 10,000平方公分，而不是100平方公分。

第3章 三角形與全等

三條線段不一定圍成三角形，兩張相像的圖也不一定能完全重合。本章用邊、角及頂點對應來判斷同一形狀與同一大小，並把已知條件寫進推理。

先備是三角形嚴格不等式、平行線角度及180°的平角。讀完後應能求基本內角，按對應順序使用全等判定，並說明為什麼只有角相同還不夠。

3.1 三內角和的平行線理由

本書的三角形由三個不共線的點及三條邊組成，三邊均為正長度；不把三點共線的退化配置算進來。

過三角形頂點A畫一條與BC平行的直線。由內錯角關係，B、C兩個內角可分別對到A處平角兩端的角；它們和原來的∠A恰分割同一平角。因此∠A + ∠B + ∠C = 180°。理由適用於所有這樣的三角形，不只某個量到接近180°的圖。

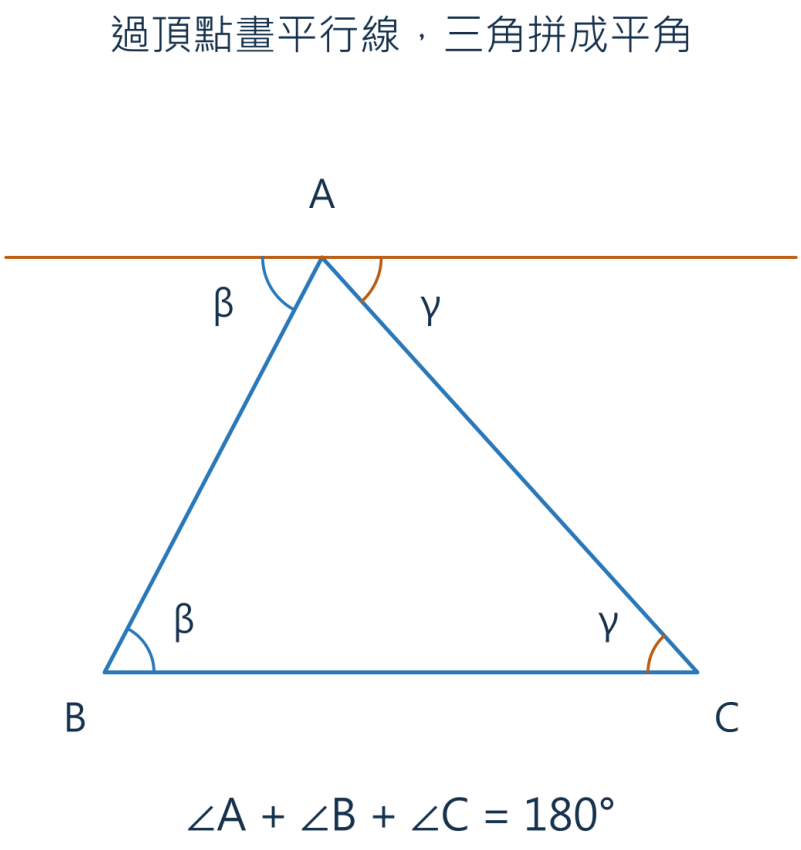


圖7 | 過頂點畫底邊的平行線，兩個內錯角與頂角一起拼成平角，說明三角形內角和。

例題1 求第三個內角

三角形兩內角為55°、65°，求第三角。

1 非退化歐氏三角形的三內角和是180°，所以第三角 + 55° + 65° = 180°。

2 先算55° + 65° = 120°，第三角 = 180°−120° = 60°。

3 60°為正且小於180°；三角相加55° + 65° + 60° = 180°，符合條件。

3.2 全等一定包含對應次序

兩圖形可經平移、旋轉及必要的鏡射完全重合時，稱為全等。寫△ABC≅△DEF，就指定A對D、B對E、C對F；因此AB對DE、BC對EF、CA對FD，相應角也相等。

在非退化三角形中，SSS是三組對應邊相等，SAS是兩組邊及它們的夾角相等，ASA是兩角及夾邊相等。AAS可先用內角和求出第三角，再化成ASA。這些是全等的充分判定；邊與角必須依同一組頂點對應，不能各選方便的一組。

例題2 三邊判定與頂點對應

AB = 3、BC = 4、CA = 5公分，DE = 3、EF = 4、FD = 5公分。按這些對應判斷兩三角形。

1. 3 + 4 > 5，兩組正邊長都能構成非退化三角形。
2. AB = DE、BC = EF、CA = FD，三組對應邊全部相等。
3. 由SSS，△ABC≅△DEF；因此∠B = ∠E，並非隨意挑一個字母相等。
4. 把第二組轉動或翻面不影響判定，因為全等容許這些保長度的移動。

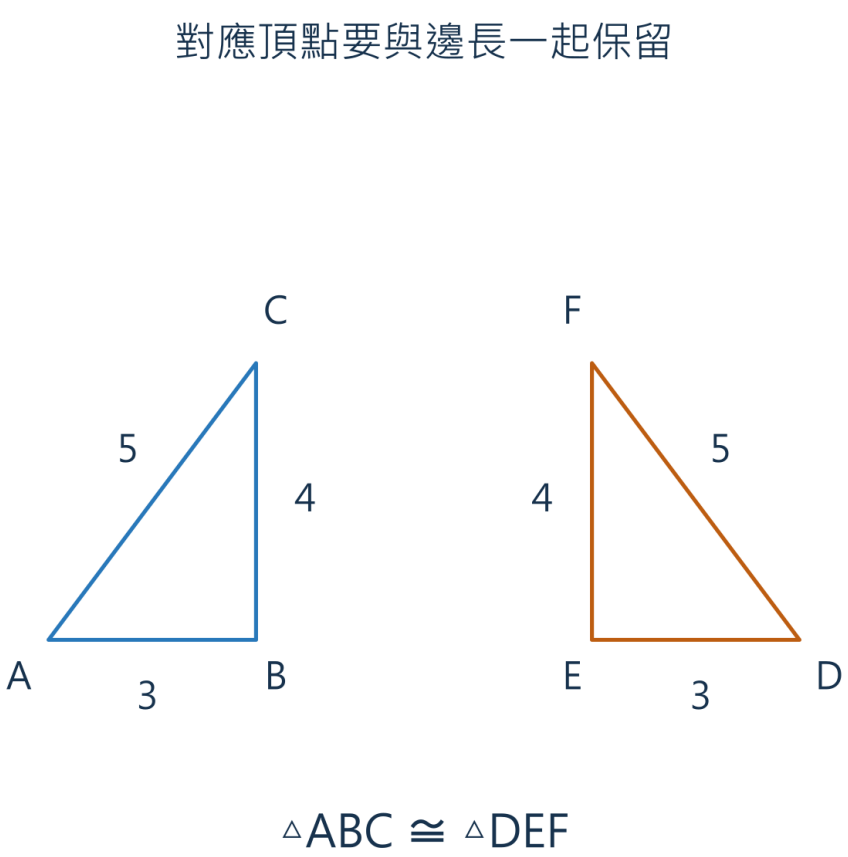


圖8 | 兩個三角形以相同邊長標記建立頂點對應；翻轉或移動不改變全等，但對應字母必須跟著保留。

例題3 夾角是哪一個角

AB = PQ = 6公分，AC = PR = 4公分，∠BAC = ∠QPR = 50°。能否判定全等？

1 AB與AC的共同端點是A，兩邊的夾角是∠BAC。

2 PQ與PR的共同端點是P，夾角是∠QPR；兩個給定角正好對應。

3 由SAS，△ABC≅△PQR，因此BC = QR，∠B = ∠Q、∠C = ∠R。

4 若把50°改給∠ABC與∠PQR，就不再是這兩條已知邊的夾角，不能直接套SAS。兩邊加非夾角不是一般的全等判定。

3.3 相同角度不能決定大小

例題4 AAA為什麼不能保證全等

一個正三角形邊長1公分，另一個邊長2公分。兩者的三個角都為60°，是否全等？

1 正三角形三邊相等，以SSS交換任意兩個頂點可得對應角相等，所以三角相等。

2 三內角和180°，每個角便是180° ÷ 3 = 60°；兩個大小的正三角形都如此。

3 若兩者全等，對應邊必相等；但1公分≠2公分，所以不全等。

4 這個反例同時保留所有AAA條件，卻使全等結論失敗，足以否定「AAA保證全等」。下一章會用相似描述這種同形不同大小。

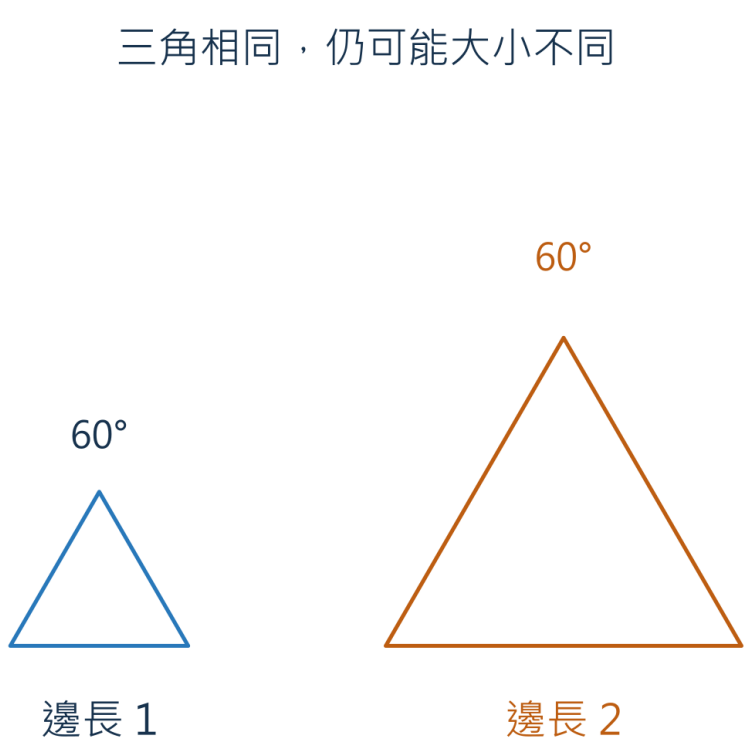


圖9 | 邊長1與2的正三角形有相同角度但大小不同；等角不是全等，比例和對應仍須分清楚。

3.4 常見錯誤與本章回顧

先確認三角形非退化，再列對應邊角。SSS、SAS、ASA與AAS各需要完整的一組條件；「都像等腰」「有兩條邊一樣」或「角度都相同」都不能代替全等判定。證明某對應角相等後，才能把它用在後面的角度計算。

3.5 練習

1 **B03-C03-Q01** 5、7、13公分能成為三角形的三邊嗎？

2 **B03-C03-Q02** 三角形兩角為48°、72°，第三角多少度？

3 **B03-C03-Q03** 正三角形每個內角是多少度？說明不只靠圖的理由。

4 **B03-C03-Q04** 等腰三角形的兩腰相等，頂角40°，兩底角各是多少度？

5 **B03-C03-Q05** AB = DE、BC = EF、CA = FD且兩三角形非退化。可寫哪一組全等？C對應哪個頂點？

6 **B03-C03-Q06** 兩三角形兩邊各為5、7公分，這兩邊的夾角都60°，足以判定全等嗎？

7 **B03-C03-Q07** 兩角各為50°、70°，這兩角間的邊都4公分。另一個角多少度，能否判定全等？

8 **B03-C03-Q08** 用邊長3與6公分的正三角形，反駁AAA保證全等。

9 **B03-C03-Q09** AB = AC，說明△ABC與△ACB的SSS對應如何推出兩底角相等。

10 **B03-C03-Q10** 兩邊長7、4公分，第三邊長x公分，非退化三角形要求x在哪個範圍？

3.6 完整解答

Q01

不能。$5 + 7 = 12 < 13$，違反最長邊小於其餘兩邊和的必要條件。三邊都是正數仍不夠。

Q02

第三角 $= 180° - 48° - 72° = 60°$。三角總和$48° + 72° + 60° = 180°$，且都為正角。

Q03

三邊相等，交換頂點後可由SSS得到三角相等。三內角和為180°，所以每角60°；不是由畫得像60°決定。

Q04

兩腰相等，SSS交換兩個底點可知兩底角相等。扣去頂角後剩$180° - 40° = 140°$，每個底角 $= 140° \div 2 = 70°$。反查$40° + 70° + 70° = 180°$。

Q05

由SSS可寫$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，依序A對D、B對E、C對F。若重排頂點，兩側必須同步重排，不能改成錯誤的邊角對應。

Q06

足夠。兩組對應邊相等，且60°是這兩邊的夾角，正是SAS。不能把同樣的結論擴展成任意一個非夾角也足夠。

Q07

第三角 = 180°−50°−70° = 60°。原來兩角及其夾邊相等，已符合ASA，所以全等；求第三角是核對，不是補一條缺失的邊長。

Q08

兩個正三角形的三角都60°，AAA條件完全符合。若全等，對應邊應相等，但3≠6，所以不全等。它們只是在下一章意義下相似。

Q09

比較△ABC與△ACB：AB對AC、AC對AB，兩者由已知相等；BC對CB是同一條邊。SSS給出B對C，所以∠ABC = ∠ACB。這個理由不需要先假設高線、角平分線或圖形對稱。

Q10

7 < 4 + x給出x > 3；x < 7 + 4給出x < 11。另有4 < 7 + x，在x > 3時自動成立。因此3公分 < x < 11公分。端點3或11只會退化，均不包含。

3.7 延伸閱讀方向

可用紙片或透明描圖疊合來理解全等，但疊圖精度不是定理證明。把每次用到的對應保留下來，下一章才不會在比例式中把不同位置的邊湊在一起。

第4章 相似與比例尺

照片放大後，長度變了，角度與形狀可以保留。相似描述的是統一比例的縮放，不是每個方向各拉各的。本章以正倍率處理對應長度、周長、面積及地圖比例尺。

先備是第一冊的比例、平方與單位，及第三章的三角形對應。讀完後應能寫出倍率的方向，區分長度倍率k與面積倍率k^2；未讀代數者可先跟著具體數值例題。

4.1 所有對應長度用同一倍率

本冊說兩圖形相似，是指一個圖形經統一正倍率縮放，再配合平移、旋轉或鏡射，可以和另一圖形重合。方向可翻轉，倍率取$k > 0$；對應角相等，對應長度都乘k。倍率1就是全等的情況。

非退化三角形可用AA、三邊成比例，或兩邊成比例且夾角相等來判定相似。後兩種判定可先把一個三角形統一縮放到已知邊長，再用前章SSS或SAS判定全等。AA則使用三角形等角定形的相似性質；不把它誤寫成等角定大小。

例題1 倍率要有方向

△ABC三邊依對應順序為4、6、8公分，放大為原來的3/2倍，求新三邊。

1 倍率是「新長度 ÷ 原長度」= 3/2，為正。

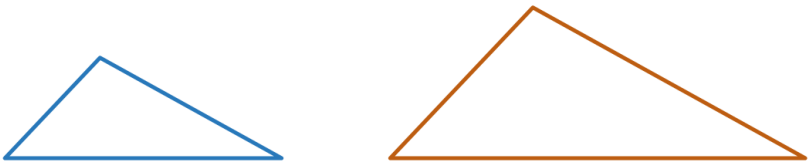
2 新邊長依序為$4 \times 3/2 = 6$、$6 \times 3/2 = 9$、$8 \times 3/2 = 12$公分。

3 反查$6/4 = 9/6 = 12/8 = 3/2$，使用的是同一倍率。

4 原三邊$4 + 6 > 8$，新三邊$6 + 9 > 12$，也保留非退化。若只把其中一邊放大，不會自動相似。

對應邊都乘同一個正倍率

新長度 ÷ 原長度 = 3/2



4、6、8　　6、9、12

先固定對應與新舊方向，再寫比例式。

圖10 | 同一正倍率把對應邊4、6、8變成6、9、12；示意圖著重對應，不從像素讀取長度。

4.2 比例尺先統一單位

例題2 從平面圖換回實際長度

比例尺1:500表示圖上長度與實際長度使用同一單位時的比。圖上一段長3.6公分，實際多長？

1 1公分對應500公分，不是500公尺。

2 實際長度 = 3.6 × 500 = 1800公分。

3 1800公分 = 18公尺。

4 反查18公尺 = 1800公分，圖上3.6 ÷ 實際1800 = 1/500，方向正確。



圖11｜1比500的圖上1公分對應實際500公分；標示單位後再轉為5公尺，避免倍率與單位混算。

4.3 面積不是再乘一次長度倍率就結束

矩形的兩邊都乘k，面積便由ab變成(ka)(kb) = k²ab。三角形的底與垂直高也都乘k，所以面積同樣乘k²。對可分割成有限個三角形的多邊形，逐塊相加也得到相同結論；任意曲線區域則還涉及面積的逼近性質。

例題3 由面積比找長度比

兩個相似三角形，大者面積是小者的9倍。大者一邊對應小者4公分，求大者這條邊。

1 由小到大的正倍率k滿足$k^2 = 9$。

2 正倍率只取$k = 3$，不取-3。

3 對應邊長 $= 4 \times 3 = 12$公分。

4 若錯把邊長也乘9，面積會變成81倍，與題意不符。

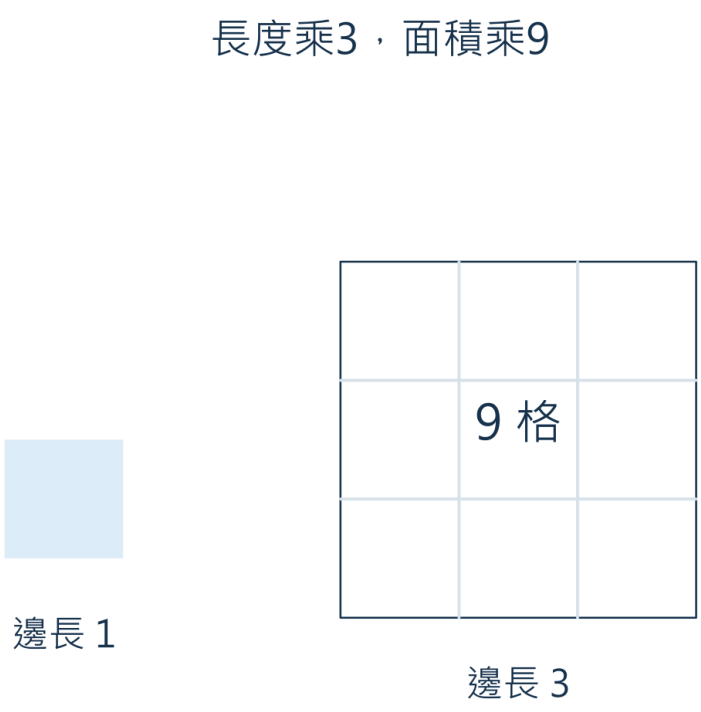


圖12 | 邊長乘3的正方形可排成九個原方塊，對照長度倍率3與面積倍率9。

例題4 三角形中點連線

在非退化△ABC中，D為AB中點、E為AC中點。證明DE = BC/2且DE平行BC。

1 中點給出AD/AB = AE/AC = 1/2，且D、E分別在從A出發的兩條邊上。

2 ∠DAE與∠BAC是同一個角，兩邊成比例且夾角相同，所以△ADE與△ABC相似。

3 對應D對B、E對C，得到DE/BC = 1/2，所以DE = BC/2。

4 相似另給∠ADE = ∠ABC；因AD與AB共線，這是一對同位角相等，由平行線的逆判定得DE平行BC。

這裡不是先看圖判定平行再證明相似；中點與共同夾角先提供相似條件，平行是後得的結論。

4.4 常見錯誤與本章回顧

比例式先固定新舊方向，再一一核對對應邊。相同面積不保證相似；相似也不保證全等。長度、周長、面積的倍率依序為k、k、k^2；立體體積的k^3留待第9章處理。

4.5 練習

1 **B03-C04-Q01** 三邊3、4、5公分的三角形放大2倍，新三邊為何？

2 **B03-C04-Q02** 相似圖形的一組對應邊由6變9公分，原來8公分的對應邊變多長？

3 **B03-C04-Q03** 比例尺1:200，圖上5公分代表實際幾公尺？

4 **B03-C04-Q04** 實際30公尺畫成3公分，比例尺為何？

5 **B03-C04-Q05** 統一放大3倍，周長與多邊形面積各變成幾倍？

6 **B03-C04-Q06** 兩相似多邊形面積比為16:25，依同一方向的對應邊比是多少？

7 **B03-C04-Q07** 2×8與4×4的兩個長方形面積都16，是否必相似？

8 **B03-C04-Q08** 三邊3、4、5與6、8、11的兩三角形是否相似？

9 **B03-C04-Q09** 三角形一邊14公分，另兩邊中點的連線長多少？

10 **B03-C04-Q10** 比例尺1:1000的平面圖中，一塊區域面積0.002平方公尺，實際面積是多少平方公尺？假定圖形為統一比例的精確模型。

4.6 完整解答

Q01

每條對應邊同乘2，得到6、8、10公分。三個比6/3、8/4、10/5都等於2，不可只改其中兩邊。

Q02

新比舊的倍率為9/6 = 3/2，另一邊 = 8 × 3/2 = 12公分。反向12 ÷ (3/2) = 8，對回原長度。

Q03

實際長度 = 5 × 200 = 1000公分 = 10公尺。比例尺中的兩個數必須先用相同單位比較。

Q04

30公尺 = 3000公分，圖上比實際 = 3:3000 = 1:1000。若先拿3除30而忽略單位，就會少掉100倍。

Q05

每條邊乘3，周長加總也乘3。底與高都乘3，面積乘$3^2 = 9$。面積的單位是平方長度，因此不能只乘3。

Q06

正長度比的平方是16/25，取正平方根得到4/5，所以對應邊比4:5。不取−4:5，因為本書倍率是正數。

Q07

不相似。第一個長方形長邊比短邊為8/2 = 4，第二個為4/4 = 1，形狀比例不同。面積相同只是一個數值條件，不能取代全部對應長度的比例。

Q08

不相似。按長短排序後，6/3 = 2、8/4 = 2，但11/5≠2，沒有同一倍率。兩組邊長本身均能構成三角形；失敗的是相似條件，而不是圖形不存在。

Q09

中點連線的倍率是1/2，所以長14 × 1/2 = 7公分。理由是兩邊中點與共同夾角建立的小三角形與原三角形相似。

Q10

由圖到實際，長度倍率1000，面積倍率$1000^2 = 1{,}000{,}000$。實際面積 = 0.002 × 1,000,000 = 2000平方公尺。已經以平方公尺表示，不再重複換一次公分單位。

4.7 延伸閱讀方向

相似能把難量的距離轉為可量的對應長度，但實際測量仍帶誤差。下一章先把面積公式的分割理由補齊，再利用倍率檢查公式是否合理。

第5章 面積的分割與拼合

周長量邊界有多長，面積量區域占了多少平面。把一張紙切成數塊再移動，外框可能改變，但只要沒有重疊或遺漏，總面積保持不變。本章用這個加法性推導常見公式。

先備是長方形、三角形及長度單位。讀完應能辨認底與垂直高、用分割核對公式，並以平方單位寫答案。本章區域均採通常的平面面積，不把線段本身當成有正面積的長條。

5.1 單位正方形與長方形

面積以單位正方形為基準，長方形邊長為a、b時面積是ab。整數邊長可逐格計數；有分數邊長時，可先把單位格細分再計數。對一般實數邊長，公式沿用面積對細分逼近的相容性，不宣稱能用有限個像素精確數完。

例題1 分數邊長仍有平方單位

長方形長4.5公分、寬3公分，求面積。

1 可把4.5公分看作9個半公分，3公分看作6個半公分。

2 小正方形每邊0.5公分，面積0.5 × 0.5 = 0.25平方公分，共9 × 6 = 54格。

3 總面積 = 54 × 0.25 = 13.5平方公分，也等於4.5 × 3。

4 邊長單位各出現一次，公分乘公分才是平方公分；不是13.5公分。

先說每格多大，再數有幾格

$$4.5\ \text{cm} = 9 \times 0.5\ \text{cm}$$

$$3\ \text{cm} = 6 \times 0.5\ \text{cm}$$

$$54 \times 0.25 = 13.5\ \text{cm}^2$$

圖13 | 長方形按小單位格細分；格子的邊長與面積要分別計算，不能只數格而忽略單位。

5.2 平行四邊形與三角形的高

平行四邊形是兩組對邊各自平行的四邊形。平行四邊形可以分割、平移拼成同底同高的長方形，總面積不變，所以面積 = 底 × 垂直高。常見的「沿高剪移一個端部三角形」圖法，須有合適的垂足位置；斜移量超過一個底長時不能直接照搬一次剪移。一般情況先把所選底邊放成水平，每隔一個底長畫垂直分割線，再把各直條中的部分水平移動整數個底長，移入同一個底長寬的長方形。原圖在每個水平高度的截段都恰長一個底長，所以移入後恰好覆蓋長方形，各塊內部不重疊也不遺漏。高是兩平行底邊所在直線的距離，不是斜邊長。

例題2 兩個三角形拼成平行四邊形

三角形底8公分，對應垂直高5公分，求面積。

1. 取一個全等副本，旋轉180°後沿適當邊拼合，可得到底8公分、高5公分的平行四邊形。
2. 拼成的面積 = 8 × 5 = 40平方公分。
3. 兩個全等三角形面積相同且內部不重疊，所以每個面積 = 40 ÷ 2 = 20平方公分。
4. 反查2 × 20 = 40。鈍角三角形的高足可能在底邊延長線上，公式仍使用到該直線的垂直距離，不改成斜邊長。

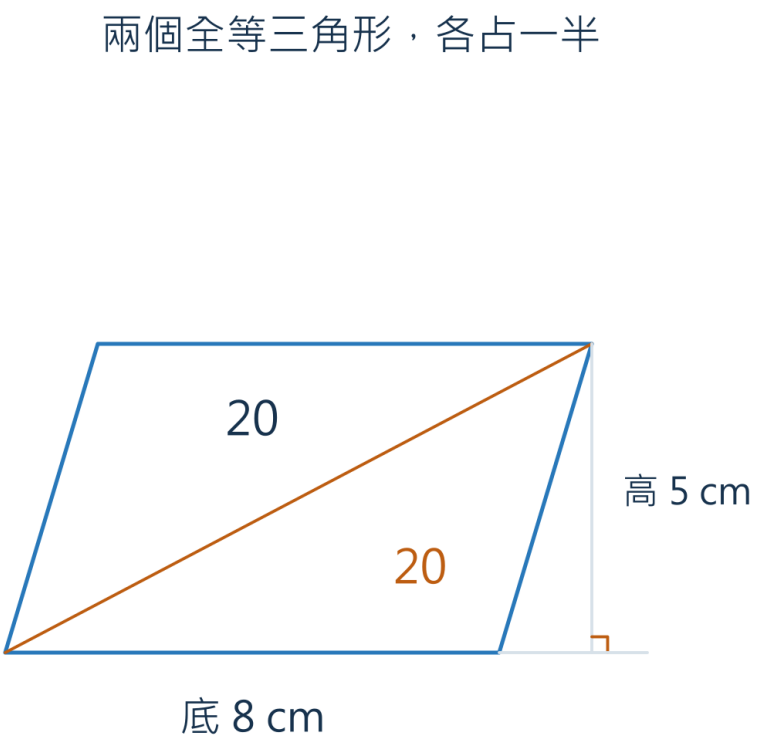


圖14 | 同底同高的平行四邊形由兩個全等三角形組成；高的直角標記說明垂直距離。

例題3 梯形公式來自兩份拼合

梯形兩條平行底邊長4、10公分，兩底所在直線的距離為3公分，求面積。

1. 取一個全等梯形副本，轉動後與原形拼成平行四邊形。
2. 拼成的底長為4 + 10 = 14公分，高仍為3公分。
3. 兩份總面積 = 14 × 3 = 42平方公分。
4. 原梯形面積 = 42 ÷ 2 = 21平方公分，也就是(上底 + 下底) × 高 ÷ 2。

5.3 面積相減與邊界改變是兩回事

例題4 切去一個角落

10公分乘8公分的長方形，在右上角切去4公分乘3公分的長方形。求剩餘面積與周長。

1. 原面積 = 10 × 8 = 80平方公分，切去面積 = 4 × 3 = 12平方公分。
2. 切口完全位於原形內，剩餘面積 = 80−12 = 68平方公分。
3. 原外邊界少掉上方4公分與右側3公分，卻多出凹口內的水平4公分與垂直3公分。
4. 少掉與新增的總長相同，所以周長仍為2 × (10 + 8) = 36公分。
5. 面積變小不代表周長一定變小；本題也不能把切去小長方形的周長14公分整個加到原周長上。

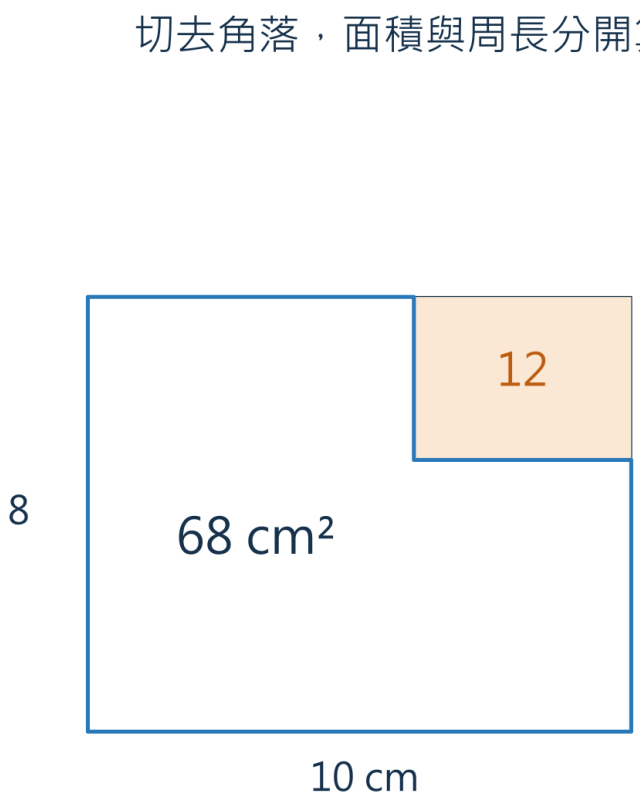


圖15 | 角落切去矩形後成為L形，面積扣掉12平方公分；新凹口取代原來同長的兩段邊界。

5.4 常見錯誤與本章回顧

分割時確認各塊內部不重疊、合起來恰為原區域；相減時確認被減區域確實在其中。公式中的高一定垂直於所選底邊。每次計算也分清自己在加面積還是在沿邊界加長度。

5.5 練習

1 **B03-C05-Q01** 長7公分、寬2.5公分的長方形，面積多少？

2 **B03-C05-Q02** 平行四邊形底6公分、垂直高4公分、斜邊5公分，面積多少？

3 **B03-C05-Q03** 三角形底9公分、高6公分，面積多少？

4 **B03-C05-Q04** 梯形平行底邊5、11公分，高4公分，面積多少？

5 **B03-C05-Q05** 正方形邊長1.2公尺，面積多少平方公尺？

6 **B03-C05-Q06** 2平方公尺等於多少平方公分？

7 **B03-C05-Q07** 2×8與4×4的長方形面積相同，周長也相同嗎？

8 **B03-C05-Q08** 鈍角三角形底10公分，頂點到底邊所在直線的垂直距離3公分，高足在邊的延長線上，面積多少？

9 **B03-C05-Q09** 長12、寬9公分的外框內挖去一個8×5公分的矩形孔，求剩餘面積，不求周長。

10 **B03-C05-Q10** 長方形寬5公分、長由8增加為10公分。用分割說明新增面積，再核對總面積。

5.6 完整解答

Q01

面積 = 7 × 2.5 = 17.5平方公分。把2.5拆為2 + 0.5，也得14 + 3.5 = 17.5，兩種分割一致。

Q02

面積 = 底 × 垂直高 = 6 × 4 = 24平方公分。斜邊5公分不是高，不能用6 × 5；斜邊與底的夾角不為直角。

Q03

兩個全等三角形合成面積9 × 6 = 54的平行四邊形，所以原面積 = 54 ÷ 2 = 27平方公分。

Q04

兩份梯形拼成底5 + 11 = 16公分、高4公分的平行四邊形。原面積 = 16 × 4 ÷ 2 = 32平方公分。

Q05

兩邊長同為1.2公尺，面積 = 1.2^2 = 1.44平方公尺。計算1.2 × 1.2的結果不是2.4；後者是兩條邊的長度和。

Q06

1公尺 = 100公分，所以1平方公尺 = 100 × 100 = 10,000平方公分。2平方公尺 = 20,000平方公分，面積換算要平方長度倍率。

Q07

第一個周長 = 2 × (2 + 8) = 20，第二個 = 2 × (4 + 4) = 16，並不相同。相同的16平方單位面積不能唯一決定邊界長。

Q08

面積 = 10 × 3 ÷ 2 = 15平方公分。高是到直線的垂直距離，高足在延長線上不使公式失效；若改用頂點到底邊端點的斜距，才會用錯量。

Q09

外框面積 = 12 × 9 = 108，孔面積 = 8 × 5 = 40平方公分。孔在外框內，所以剩餘108−40 = 68平方公分。孔的位置會影響某些邊界描述，但不改本題已知的面積差。

Q10

新增區域是一條長10−8 = 2公分、寬5公分的矩形，面積2 × 5 = 10平方公分。原面積8 × 5 = 40，加上新增10得到50，正好等於10 × 5。這是分配律(8 + 2) × 5 = 8 × 5 + 2 × 5的面積解釋。

5.7 延伸閱讀方向

下一章把面積分割用在一般定理的證明。數一個3、4、5邊長圖的面積可以做驗算，但只有保留任意正邊長與直角條件，才是在證明所有直角三角形的關係。

第6章 畢氏定理

在直角三角形中，兩直角邊平方和等於斜邊平方。這句話同時包含形狀條件、邊的角色及平方運算；拿掉直角，不能照用公式。本章先證明一般關係，再處理求長與逆判定。

先備是面積的分割拼合、三角形內角和及平方根。讀完應能指出斜邊、寫出一般重排理由，並在求根時保留正長度。

6.1 四個三角形重排的證明

設直角三角形兩直角邊為a、b，斜邊為c，三者均為正數。斜邊對著90°，不是依圖放在上方、右側或看起來最斜來命名。

例題1 不只驗算3、4、5

用四個全等直角三角形拼在邊長a + b的大正方形四角，證明$a^2 + b^2 = c^2$。

1 每個角落放一個三角形，兩條直角邊沿大正方形的相鄰邊；每條外邊恰由a、b兩段組成。

2 中央剩餘四邊形的四邊都是三角形斜邊，長度均為c。

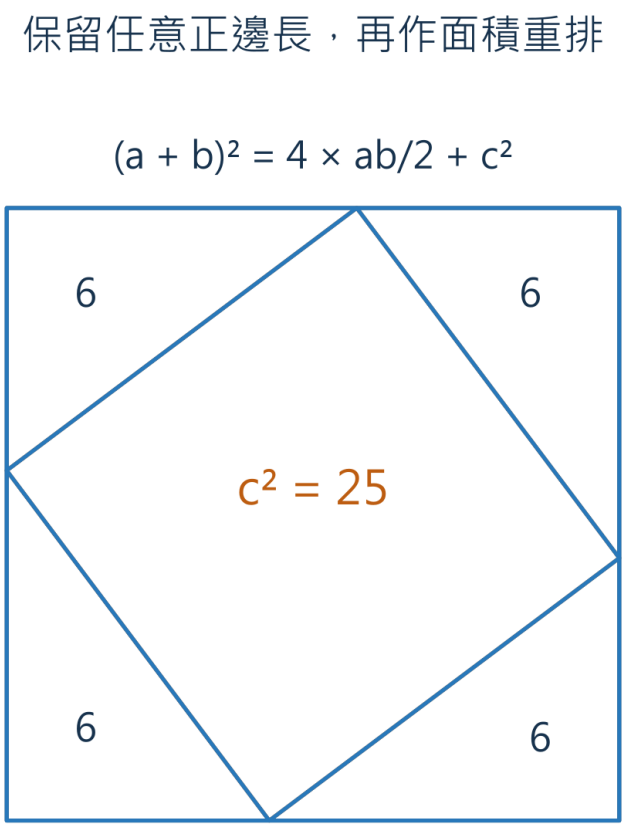
3 原三角形兩銳角和為90°。中央每個角等於180°減去這兩銳角之和，所以也是90°。

4 因此中央確為邊長c的正方形，而不是只憑外觀叫它正方形。

5 大面積 = $(a + b)^2$；四個三角形合計$4 \times ab/2 = 2ab$，中央面積c^2。拼合沒有重疊或遺漏，故$(a + b)^2 = 2ab + c^2$。

6 展開左邊得到$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$；兩側同減2ab，得$a^2 + b^2 = c^2$。

7 a、b是任意正直角邊，推理沒有把它們固定成3、4，所以是一般證明。$3^2 + 4^2 = 5^2$只是其中一個數值核對。



圖取 a=3、b=4；一般推導在正文。

圖16 | 四個直角三角形占據大正方形四角，中央四邊等於斜邊且四角為直角；本圖取3、4、5作一般重排的數值示例。

6.2 求長時保留邊的角色

例題2 已知兩直角邊

直角三角形兩直角邊為5、12公分，求斜邊c。

1 已知直角，所以$c^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$。

2 斜邊為正長度，取$c = \sqrt{169} = 13$公分，不取−13。

3 回查$5^2 + 12^2 = 13^2$，且13大於5與12，符合斜邊角色。

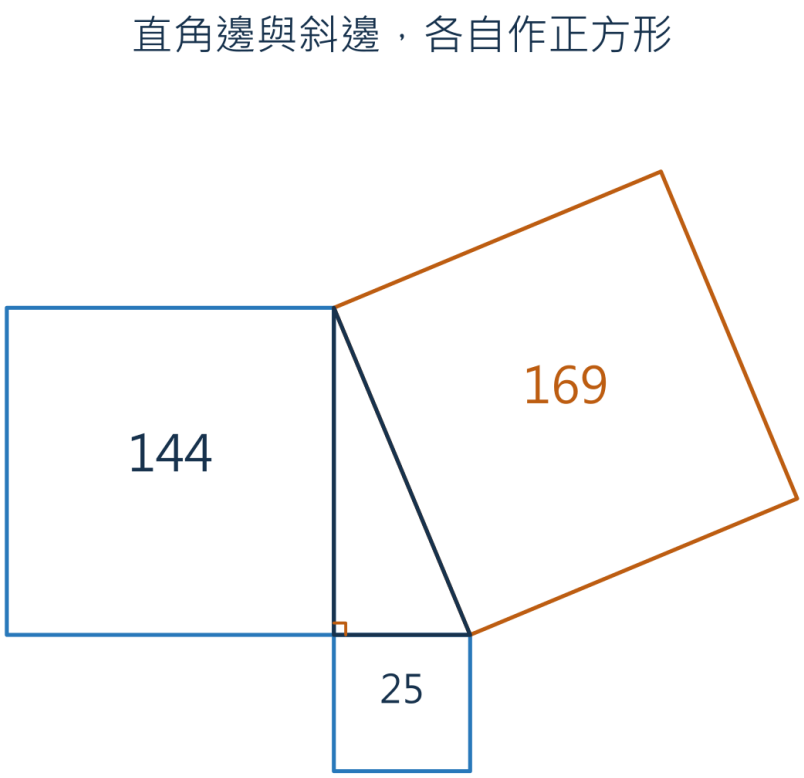


圖17 | 例題2的5、12、13直角三角形，三邊正方形面積分別是25、144、169；不以正方形的像素數當證明。

例題3 已知斜邊和一條直角邊

斜邊17公分，一條直角邊8公分，求另一條直角邊b。

1 正確關係是$8^2 + b^2 = 17^2$，不能把17放在兩直角邊的那一側再相加。

2 同減64，得到$b^2 = 289 - 64 = 225$。

3 保留$b > 0$，得到$b = 15$公分。

4 回查$64 + 225 = 289$，且$8 + 15 > 17$，數值與非退化三角形條件相符。

6.3 逆命題要另給理由

例題4 從三邊判斷直角

非退化三角形三邊7、24、25公分，能否判定為直角三角形？

1. 25是最長邊，先算$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$。

2. 另作一個兩直角邊為7、24的直角三角形。由已證的定理，它的斜邊長是正的$\sqrt{625} = 25$。

3. 新作的直角三角形與原三角形三邊相等，依SSS全等。

4. 對應7、24兩邊的夾角因此也是90°，原三角形為直角三角形。

這個例題示範了逆命題的一般證明方法。設原三角形是任意邊長為a、b、c的非退化三角形，且$a^2 + b^2 = c^2$。另作兩直角邊為a、b的直角三角形，由已證的正向定理，其斜邊平方為$a^2 + b^2 = c^2$；因邊長為正，斜邊恰為c。新作圖與原三角形遂由SSS全等，原圖中a、b兩邊的夾角也為90°。這個理由對所有符合前提的正邊長成立，不是因為原命題成立就直接把箭頭倒過來。

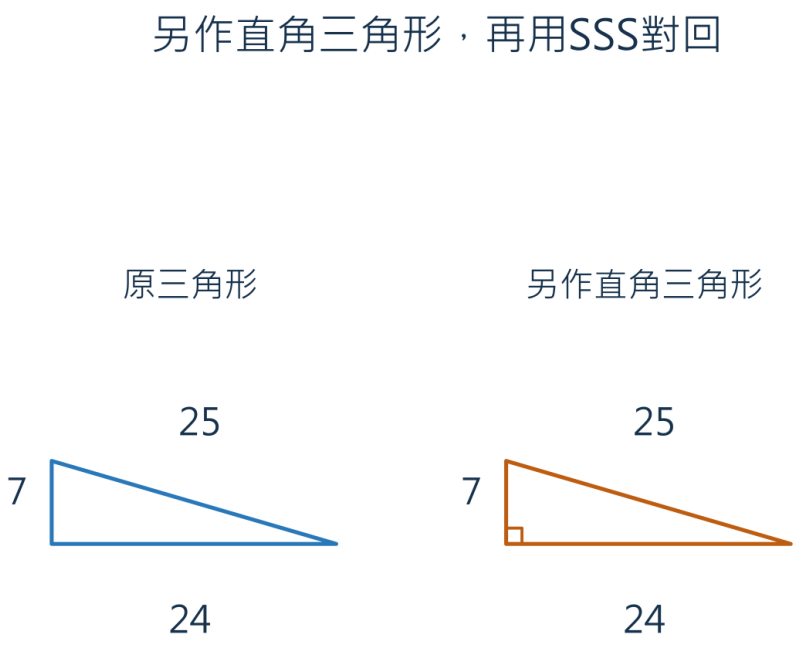


圖18 | 先作已知兩直角邊的直角三角形，再以三邊相等對回原三角形，建立逆判定的理由。

6.4 常見錯誤與本章回顧

求長之前標出直角和斜邊；判定直角之前以最長邊作平方比較。平方根只取正長度。√(a² + b²)通常不等於a + b；把根號分別拆掉會多出未被允許的運算。

6.5 練習

1 **B03-C06-Q01** 直角邊6、8公分，求斜邊。

2 **B03-C06-Q02** 斜邊13公分、一條直角邊5公分，求另一邊。

3 **B03-C06-Q03** 三邊8、15、17公分，是否為直角三角形？

4 **B03-C06-Q04** 三邊4、5、6公分，是否為直角三角形？

5 **B03-C06-Q05** 純幾何模型中，垂直牆與水平地面成直角，長10公尺的線段上端在牆上、下端距牆6公尺，求上端離地高度。

6 **B03-C06-Q06** 長方形邊長9、12公分，求對角線。

7 **B03-C06-Q07** 正方形邊長3公分，求對角線，保留精確根式。

8 **B03-C06-Q08** 用$a=3$、$b=4$說明$\sqrt{(a^2+b^2)}$不總等於$a+b$。

9 **B03-C06-Q09** 三邊13、14、15公分，能用畢氏逆命題判定它為直角嗎？

10 **B03-C06-Q10** 在例題1的重排中取$a=2$、$b=3$。分別算大正方形、四個三角形及中央正方形面積，再求c。

6.6 完整解答

Q01

斜邊平方 = $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$。取正長度$\sqrt{100} = 10$公分；反查$100 = 10^2$。

Q02

另一邊平方 = $13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$，取正根得12公分。回查$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$。

Q03

17最長，$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$。三邊均正且$8 + 15 > 17$，依已說明的逆命題，對17邊的角為直角。

Q04

6最長，但$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$，不等於$6^2 = 36$，所以不是直角三角形。$4 + 5 > 6$表示它仍可成為三角形，不能把「非直角」寫成「不存在」。

Q05

模型中的高度與6公尺底邊互相垂直，10公尺是斜邊。高度平方 = $100 - 36 = 64$，取正根為8公尺。$6^2 + 8^2 = 10^2$；這只是幾何模型，不是對真實梯具或施工安全的建議。

Q06

長方形角為90°，對角線構成直角三角形。對角線平方 = $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$，所以長15公分。對角線不是兩邊長相加的21公分。

Q07

對角線平方 = $3^2 + 3^2 = 18$，所以長$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$公分。驗算$(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$，且長度為正。

Q08

左側 = $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$，右側 = $3 + 4 = 7$，兩者不等。這個符合a、b為正的反例，已足以否定對所有a、b都成立的說法。

Q09

15最長，$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$，而$15^2 = 225$，並不相等。因此不能判定為直角；由直角三角形必滿足的正向定理，也知它不是直角三角形。

Q10

大面積 = $(2 + 3)^2 = 25$；每個三角形面積$2 \times 3 \div 2 = 3$，四個合計12。中央面積 = $25 - 12 = 13$，故$c^2 = 13$，正斜邊$c = \sqrt{13}$。也等於$2^2 + 3^2 = 13$，兩條計算鏈一致。

6.7 延伸閱讀方向

畢氏定理後來可用來定義坐標距離，但本章的重排證明沒有先把距離公式當前提。遇到新的逆命題，也要像本章一樣另找可用的推理，而不是直接倒轉一句話。

第7章 圓、弧與圓形區域

「一個圓」有時被口語地用來指邊界，有時指整片區域。本章會分開說明：圓周是到圓心距離恰為r的點，圓盤則包含到圓心距離不超過r的全部點。半徑一律取r > 0。

先備是比例、面積、平方及畢氏定理。讀完應能求圓周、圓盤、扇形與圓環的量，辨認弧長和封閉邊界周長的差異，並保留π的精確形式。

7.1 π、圓周與面積

直徑d = 2r。所有圓彼此相似，圓周長與直徑的比是同一常數π，因此C = πd = 2πr。π是精確常數，3.14只是近似值，不把π直接定義成3.14或22/7。

圓盤面積為πr²，可用內接正多邊形的逼近理解：把多邊形從圓心分成三角形，總面積是「多邊形周長 × 邊心距 ÷ 2」。邊數增加時，周長趨近圓周2πr，邊心距趨近r，面積趨近πr²。這裡使用面積與周長的極限性質；任何有限張三角形圖都還不是曲邊圓盤的完全相等分割。

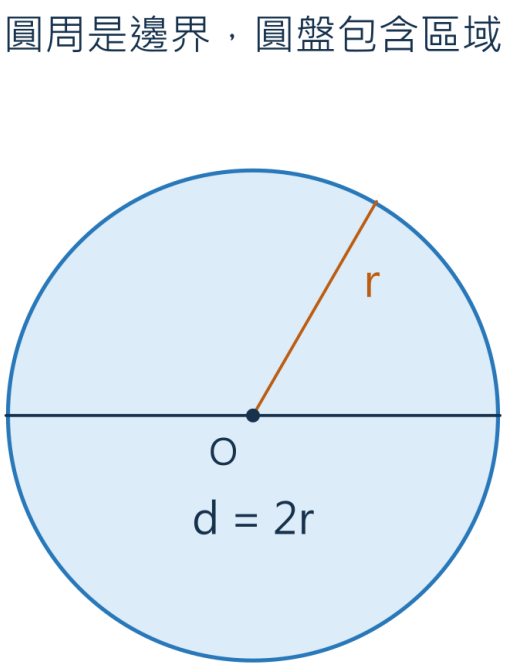


圖19 | 圓周是邊界、圓盤是區域；半徑連圓心與圓周，直徑通過圓心且長為兩倍半徑。

例題1 精確式與近似值分開

圓半徑5公分，求周長與面積；若另外指定π≈3.14，再給近似數值。

1 周長C = 2π × 5 = 10π公分，面積A = π × 5² = 25π平方公分。

2 這兩個含π的式子是精確答案，單位不同。

3 使用題目指定的近似，C≈10 × 3.14 = 31.4公分，A≈25 × 3.14 = 78.5平方公分。

4 近似代入沒有把10π變成「精確等於31.4」；符號≈要保留。

7.2 扇形是整圓的固定比例

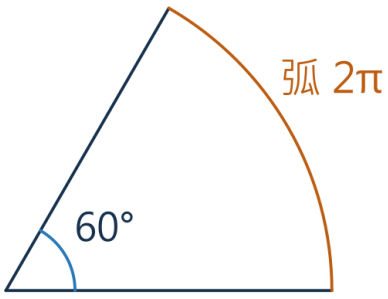
對0° < θ < 360°的圓心角，其扇形占整圓的比例是θ/360°。同一圓的弧長與扇形面積依此比例分配；這不表示弧線變成了直線。

例題2 60度扇形的三種量

半徑6公分、圓心角60°，求弧長、面積及扇形周長。

1. 比例為60/360 = 1/6。
2. 整圓周長12π公分，所以弧長 = 12π ÷ 6 = 2π公分。
3. 整圓盤面積36π平方公分，所以扇形面積 = 36π ÷ 6 = 6π平方公分。
4. 扇形邊界還包括兩條半徑，周長 = 2π + 6 + 6 = 12 + 2π公分。

弧長不等於整個扇形周長



r = 6

面積 = 6π cm²

周長 = 12 + 2π cm

圖20 | 扇形弧長只沿曲邊量，扇形周長還要加兩條半徑；圓心角決定其占整圓的比例。

例題3 圓環面積與兩條邊界

同心圓的外半徑5公分、內半徑3公分，求圓環面積及邊界總長。

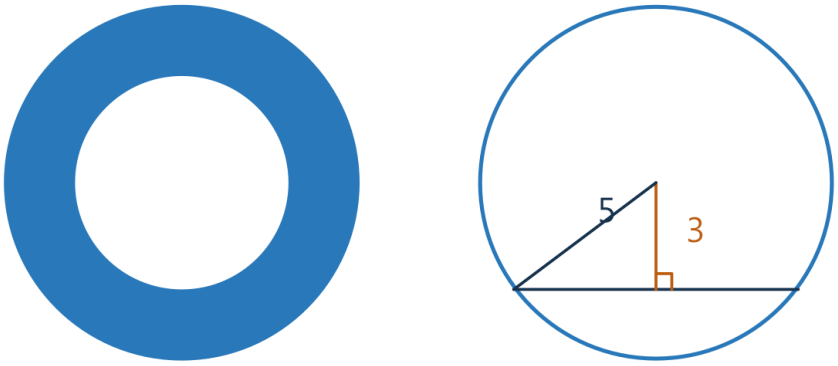
1 內圓盤完全在外圓盤內，面積可相減：$\pi \times 5^2 - \pi \times 3^2 = 16\pi$平方公分。

2 圓環的邊界有外圓周與孔洞的內圓周，總長 $= 2\pi \times 5 + 2\pi \times 3 = 16\pi$公分。

3 兩個數值碰巧都是16π，但一個是平方公分、一個是公分，不能當成同一種量。

4 面積不是$\pi(5-3)^2 = 4\pi$；那是半徑2公分的另一個圓盤。

扣面積、加邊界；半弦用畢氏



R=5，r=3

面積 16π

邊界 16π

半徑5，距離3

半弦4，整弦8

圖21 | 圓環的面積扣除內圓盤，但邊界總長必須把內、外兩條圓周都加上。

7.3 弦長連接直角三角形

例題4 圓心到弦的垂直距離

圓半徑5公分，M在線段AB上，OM垂直弦AB且OM = 3公分，O為圓心。求AB。

1 OA = OB = 5公分，OM = 3公分，△OMA、△OMB都是直角三角形。

2 由畢氏定理，$AM^2 = 5^2 - 3^2 = 16$，BM^2也等於16。

3 AM、BM皆取正根，所以均為4公分。

4 M在A、B之間，AB = AM + MB = 8公分。半徑5與距離3不能直接相加當成弦長。

7.4 常見錯誤與本章回顧

先分清半徑與直徑、邊界與區域、弧長與扇形周長。圓環面積相減，孔洞邊界長卻要加回。根式與π能保留時先保留，只有題目要求近似時再依指定精度處理。

7.5 練習

1 **B03-C07-Q01** 直徑14公分，求半徑、周長與面積。

2 **B03-C07-Q02** 半徑3公分，求周長與面積，保留π。

3 **B03-C07-Q03** 半徑4公分、圓心角90°，求弧長、面積及扇形周長。

4 **B03-C07-Q04** 半徑6公分的半圓盤，面積與完整邊界周長各是多少？

5 **B03-C07-Q05** 外半徑6、內半徑2公分的圓環，求面積及邊界總長。

6 **B03-C07-Q06** 半徑放大2倍，圓周長與圓盤面積各變成幾倍？

7 **B03-C07-Q07** 周長20π公分的圓，半徑與面積各是多少？

8 **B03-C07-Q08** 半徑6公分的圓中，一段弧長3π公分，求其對應的非優圓心角與扇形面積。

9 **B03-C07-Q09** 半徑10公分，圓心到弦的垂直距離6公分，垂足在弦上，求弦長。

10 **B03-C07-Q10** 半徑2公分，指定π≈3.14時求周長與面積近似值，並說明兩者單位。

7.6 完整解答

Q01

半徑 = 14 ÷ 2 = 7公分。周長 = πd = 14π公分，面積 = πr² = 49π平方公分。面積不能把直徑14直接當半徑平方。

Q02

周長 = 2π × 3 = 6π公分；面積 = π × 3² = 9π平方公分。這些是精確式，不必先換成小數。

Q03

比例90/360 = 1/4。弧長 = (1/4) × 8π = 2π公分；面積 = (1/4) × 16π = 4π平方公分；周長還加兩半徑，為8 + 2π公分。

Q04

面積是整圓盤的一半，為36π/2 = 18π平方公分。邊界包括半圓弧12π/2 = 6π公分及直徑12公分，所以周長12 + 6π公分。

Q05

面積 = π(6²−2²) = 32π平方公分；邊界總長 = 2π × 6 + 2π × 2 = 16π公分。面積與周長使用不同的加減關係。

Q06

C = 2πr，r乘2使C乘2；A = πr²，r乘2使A乘2² = 4。這也符合相似圖形的長度與面積倍率。

Q07

2πr = 20π，同除正且非零的2π，得r = 10公分。面積 = π × 10² = 100π平方公分。回查2π × 10 = 20π。

Q08

整圓周長12π，弧占比 = 3π/(12π) = 1/4，圓心角 = 360° × 1/4 = 90°。扇形面積 = 36π × 1/4 = 9π平方公分。

Q09

半弦長的平方 = 10²−6² = 100−36 = 64，正半弦長8公分。左右兩個直角三角形給出相同半弦長，所以整弦16公分。回查6² + 8² = 10²。

Q10

周長C = 4π公分≈12.56公分；面積A = 4π平方公分≈12.56平方公分。兩個近似數字相同，但量與單位不同，不能據此把周長等同面積。

7.7 延伸閱讀方向

弧度會把圓心角與弧長的比例寫得更簡潔，留待函數與三角冊展開。這裡先保留角度制的360°，不要把尚未換算的度數直接塞進弧度公式。

第8章 對稱、等距與縮放

把紙片平移、轉動或翻面，形狀和大小不變；把影像只朝一個方向拉長，通常就不同了。本章追蹤變換保留哪些量，也用簡單坐標記錄同一點變到哪裡。

先備是全等、相似與長度平方。這裡只需約定：兩條互相垂直的數線相交於原點O，x向右為正，y向上為正，點(x,y)依序記水平與垂直位置；圖軸使用同樣的長度單位。

8.1 平移把所有點移動同一段

等距變換保留任意兩點間的距離，因此也保留由它決定的角度與全等關係。平移、旋轉、鏡射都是平面的等距變換；鏡射雖可能翻轉繞行方向，仍可用於全等。

例題1 平移後的對應線段

P = (1,2)、Q = (4,2)，全部點向右3、向下1個單位平移，求P′、Q′及線段長。

1 水平位置同加3，垂直位置同減1，所以P′ = (4,1)、Q′ = (7,1)。

2 原線段水平，長4−1 = 3；新線段也水平，長7−4 = 3。

3 一般地，兩點同加同一位移，其坐標差不變；長度由這些差決定，因此不只這一條水平線段保長。

4 反向向左3、向上1可把每個點還原，沒有任意丟失或合併點。

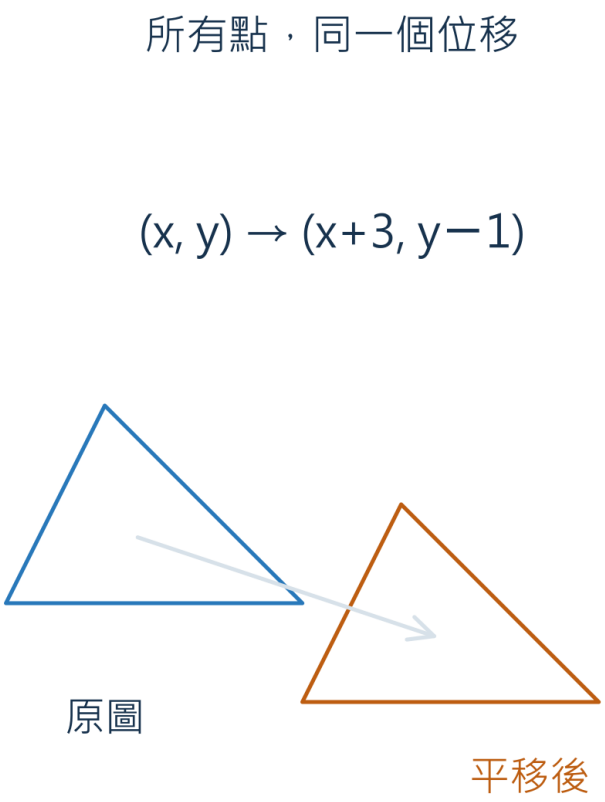


圖22 | 同一位移箭頭作用於三角形全部頂點，平移前後對應邊長與形狀相同。

8.2 鏡射與旋轉保留距離

例題2 關於y軸鏡射

A = (1,1)、B = (3,1)、C = (2,3)，求關於y軸鏡射的三頂點。

1 到y軸的水平距離不變，但左右互換，規則是(x,y)變為(−x,y)。

2 得A′ = (−1,1)、B′ = (−3,1)、C′ = (−2,3)。

3 原AB長2，鏡像A′B′也長2；對任意兩點，水平差只改正負，垂直差不變，距離平方因此不變。

4 再鏡射一次，−(−x) = x，回到原來的點；繞行方向反轉不等於長度改變。

例題3 逆時針轉90度

以原點為中心逆時針旋轉90°，P = (2,1)、Q = (4,1)變到哪裡？

1 在x向右、y向上的坐標約定中，規則為(x,y)變為(−y,x)。

2 所以P′ = (−1,2)、Q′ = (−1,4)。

3 原P、Q相距2，變後是垂直線段，長4−2 = 2。

4 原$OP^2 = 2^2 + 1^2 = 5$，變後$OP'^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$；一般坐標差的平方和也只交換兩項，因此任意兩點距離保持。

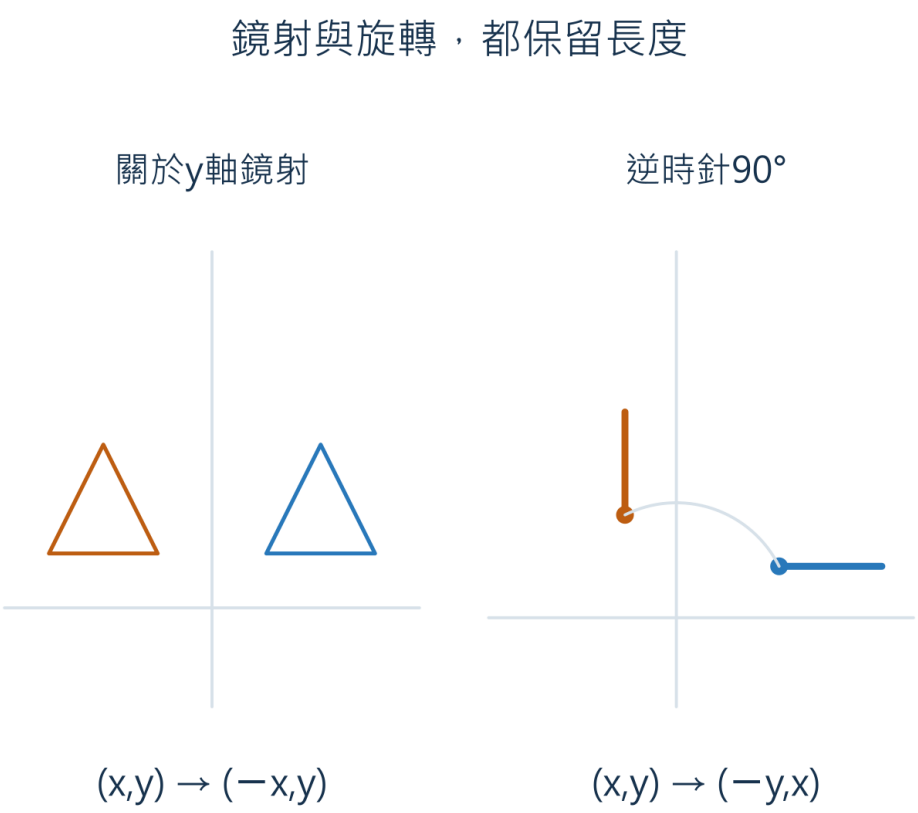


圖23｜關於y軸的鏡射改變水平坐標正負；逆時針90度旋轉把(x,y)變為(−y,x)，兩者均保長度。

8.3 統一倍率與單向拉伸不同

例題4 同一三角形的兩種放大

原三角形A = (1,1)、B = (3,1)、C = (1,2)。比較「以原點為中心全部坐標乘2」與「只有x乘2」。

1 原AB = 2、AC = 1，兩邊互相垂直，所以面積2 × 1 ÷ 2 = 1平方單位。

2 全部坐標乘2得A′ = (2,2)、B′ = (6,2)、C′ = (2,4)。兩直角邊變4與2，面積4，長度統一乘2、面積乘4。

3 只有x乘2得A″ = (2,1)、B″ = (6,1)、C″ = (2,2)。兩直角邊變4與1，面積2。

4 後者的水平邊倍率2、垂直邊倍率1，沒有同一倍率，不能把這個對應當成相似縮放。本例兩三角形的邊長比也不同，確實不相似。

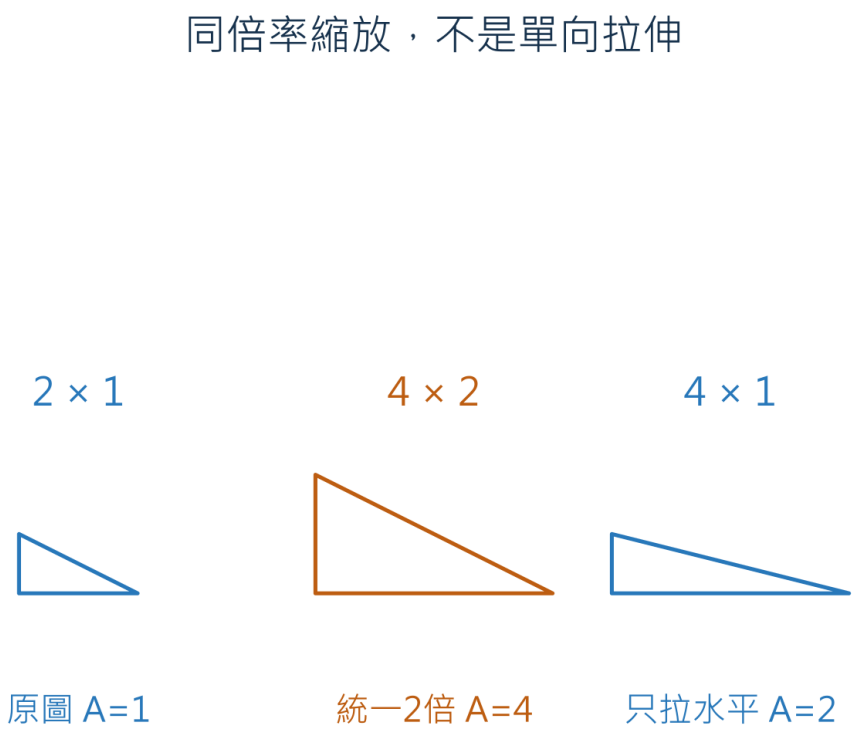


圖24 | 同時放大兩軸與只拉伸水平軸作比較；直角邊的倍率、面積倍率分別標示，不把單向拉伸叫作統一縮放。

8.4 常見錯誤與本章回顧

坐標變換前先說原點、軸方向、轉向及倍率。平移不表示只移一個點；鏡射不是把兩個坐標都改負；旋轉90°也不是只交換坐標而不管正負。縮放保形，只有倍率1時才保全部長度。

8.5 練習

1 **B03-C08-Q01** 點(−2,3)向右5、向下4平移後在哪裡？

2 **B03-C08-Q02** 點(−2,3)關於x軸的鏡像為何？

3 **B03-C08-Q03** 同一點關於y軸的鏡像為何？

4 **B03-C08-Q04** (4,−1)繞原點逆時針轉90°後在哪裡？

5 **B03-C08-Q05** (2,−3)繞原點轉180°後在哪裡？

6 **B03-C08-Q06** 以原點為中心正倍率3縮放，(2,−1)變到哪裡？

7 **B03-C08-Q07** 關於同一直線連做兩次鏡射，結果為何？用y軸規則說明。

8 **B03-C08-Q08** 寬2、高3的長方形只水平放大2倍，得到寬4、高3的長方形。兩者是否相似？

9 **B03-C08-Q09** 一個多邊形經平移、旋轉或鏡射，周長與面積是否改變？說明理由。

10 **B03-C08-Q10** 正方形有幾條鏡射對稱軸？圓又有幾條？

8.6 完整解答

Q01

水平$-2+5=3$，垂直$3-4=-1$，所以新點$(3,-1)$。反向減5、加4得到$(-2,3)$，與原來的點一致。

Q02

關於x軸，水平位置不變、垂直位置改正負，故$(-2,3)$變為$(-2,-3)$。原點到兩點的距離平方都為$4+9=13$。

Q03

關於y軸，只改水平坐標正負，得到$(2,3)$。不能改成$(2,-3)$；後者是繞原點轉$180°$的結果。

Q04

套用(x,y)變為$(-y,x)$，得到$(1,4)$。原距離平方$4^2+(-1)^2=17$，新距離平方1^2+4^2也為17。

Q05

轉$180°$把兩坐標都改正負，所以得到$(-2,3)$。也可連做兩次逆時針$90°$：$(2,-3)$先變$(3,2)$，再變$(-2,3)$。

Q06

每個坐標同乘3，得到(6,−3)。到原點的距離乘3，距離平方由5變45，正好乘9；不是等距變換。

Q07

第一次(x,y)變(−x,y)，第二次變(−(−x),y) = (x,y)，所有點都還原。這個結論要求兩次使用同一條鏡線。

Q08

不相似。原長邊比短邊為3/2，新長邊比短邊為4/3，兩比不同；即使允許旋轉對應，也不能找到統一倍率。只比較四個直角相同並不夠。

Q09

周長不變，因每條對應邊長都不變。面積也不變，可把多邊形分成三角形，等距變換將各塊全等地移到新位置，保留每塊面積與不重疊關係，再加總即可。繞行方向可反轉，但通常的非負面積不因此變負。

Q10

正方形有4條：兩條對角線及兩組對邊中點的連線。圓的任一直徑所在直線都可作鏡線，故有無限多條；不把正方形的任意過中心直線也誤算成對稱軸。

8.7 延伸閱讀方向

坐標可把幾何變換寫成簡單規則，但坐標系本身是約定，不是圖形一定朝向某個方向。以後學線性代數時，會再把這些規則整理成矩陣與線性映射。

第9章 立體與展開圖

把盒子展開會看見面，把盒子裝滿則是在量體積。表面積與體積描述不同的量；同一張透視圖也不能直接拿來量真實邊長。本章用直角柱體、圓柱及正確的展開圖連接平面與空間。

先備是面積、圓周與畢氏定理。讀完應能計算常見柱體的表面積與體積，分清底面與側面，以及檢查展開圖會不會重疊。尺寸均指理想幾何內部模型，不另外計材料厚度。

9.1 柱體把固定底面沿高度延伸

柱體體積為底面積B乘垂直高h，即V = Bh。長方體可從單位立方體排列理解，分數尺度可細分；一般柱體則使用等截面分層與體積的逼近性質。對直柱，側面積是底面周長乘高；斜柱的側面形狀不同，不能直接沿用這個側面公式。

例題1 長方體的六個面

長方體三邊2、3、4公分，求體積及封閉外表面積。

1. 以2×3的矩形作底，B = 6平方公分，高4公分，體積 = 6 × 4 = 24立方公分。
2. 六面分成三組相等的對面，面積依序為2×3 = 6、2×4 = 8、3×4 = 12平方公分，各有兩片。
3. 總表面積 = 2 × (6 + 8 + 12) = 52平方公分。
4. 若改取3×4作底，高2，體積12 × 2仍是24，與底面的選擇一致。

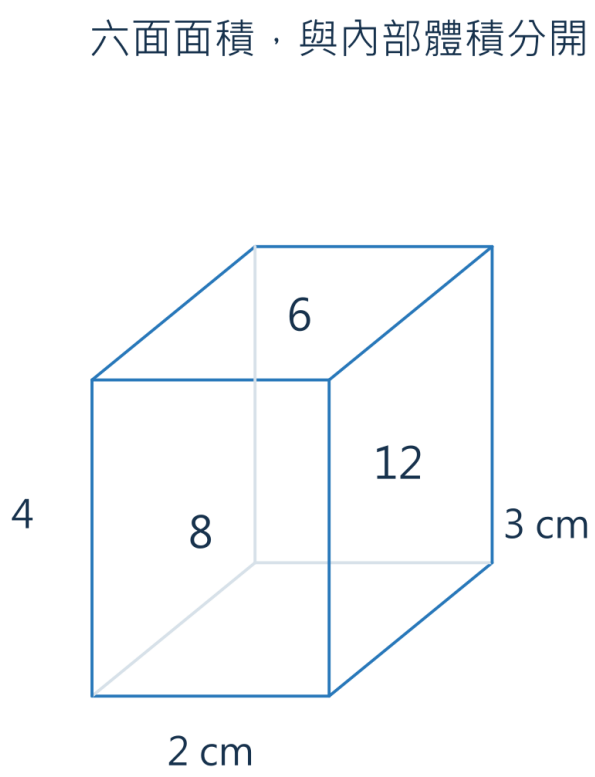


圖25｜長方體三條互相垂直的邊對應體積三因子；三組對面分別標明面積，透視線不供量尺讀值。

例題2 正方體展開成六個正方形

正方體邊長3公分，求表面積與體積，並說明有效展開圖需要什麼。

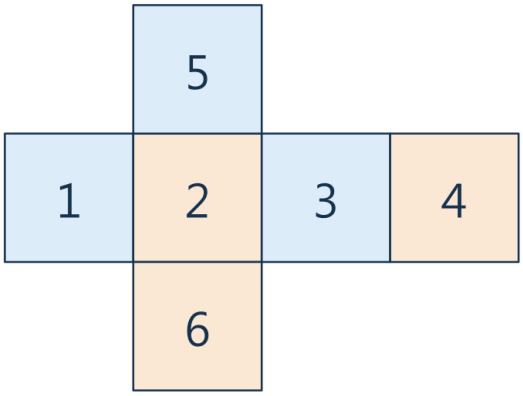
1 六個面各有$3^2 = 9$平方公分，總面積$6 \times 9 = 54$平方公分。

2 體積 $= 3^3 = 27$立方公分，不是表面積再乘6。

3 有效展開圖要讓六個面折回不同的六個位置，沿邊相接，不重疊、不缺面；僅有六個相同正方形不保證可以折成正方體。

4 圖示採一排四格、第二格上下一格的十字形展開；每面標號可追蹤折回後的相鄰與相對關係。

有六片，還要能折到六個不同面



$$S = 6 \times 3^2 = 54\ \text{cm}^2$$

$$V = 3^3 = 27\ \text{cm}^3$$

圖26 | 一排四格且第二格上下各一格，是正方體的一種展開圖；六面各有不同標號以追蹤折疊。

9.2 底面不是矩形時

例題3 直三角柱

直三角柱底面是直角邊3、4公分的三角形，柱高10公分，求體積與封閉表面積。

1. 底面斜邊 $= \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$公分，底面積 $= 3 \times 4 \div 2 = 6$平方公分。
2. 體積 $= 6 \times 10 = 60$立方公分。
3. 三個側面是3×10、4×10、5×10的矩形，總面積 $= (3 + 4 + 5) \times 10 = 120$平方公分。
4. 再加上兩底面 $2 \times 6 = 12$，表面積 $= 132$平方公分。只加側面會漏掉兩個三角形。

例題4 圓柱的側面展開

直圓柱半徑2公分、高5公分，求體積及封閉表面積。

1 底面積 = π × 2² = 4π平方公分，體積 = 4π × 5 = 20π立方公分。

2 沿一條母線把側面展開成矩形，一邊是高5，另一邊是底面圓周2π × 2 = 4π公分。

3 側面積 = 4π × 5 = 20π平方公分。

4 加兩底面8π，表面積 = 28π平方公分。側面矩形的寬是圓周，不是直徑4公分。

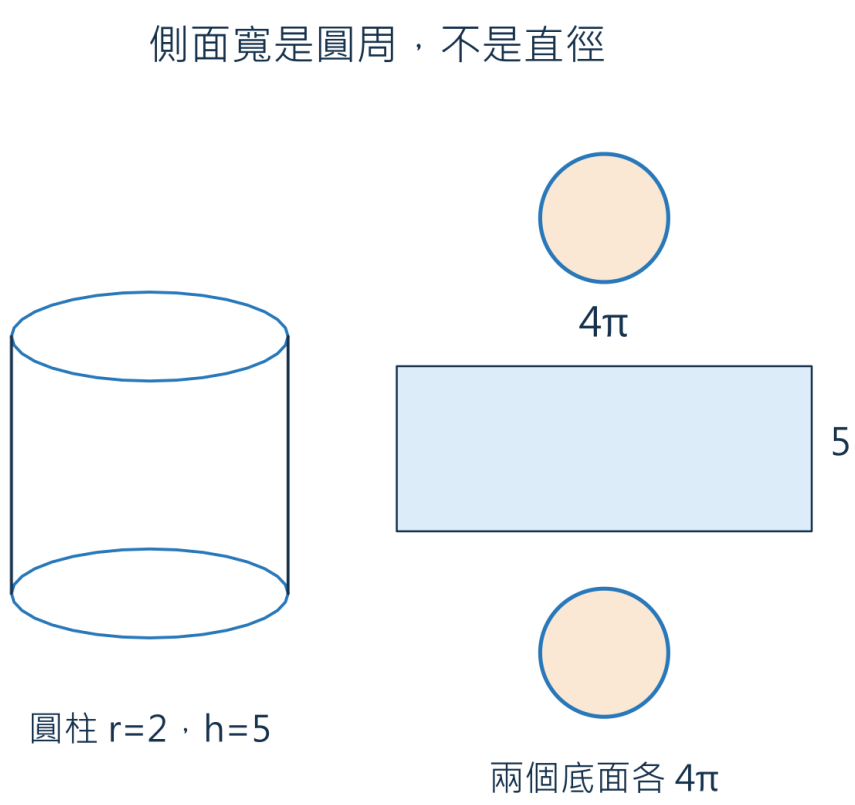


圖27 | 圓柱側面展開的矩形寬為圓周2πr，高為h；兩個圓盤底面另外計入，不能漏面。

9.3 常見錯誤與本章回顧

表面積的單位是平方，體積是立方。開口盒要依實際保留的面計面積；柱體公式不能直接套到錐體，因為錐體各高度的截面不同。若空間所有長度統一乘$k>0$，面積乘k^2、體積乘k^3，單向拉伸不能冒充統一相似。

9.4 練習

1 **B03-C09-Q01** 正方體邊長4公分，求表面積與體積。

2 **B03-C09-Q02** 長方體邊長5、4、3公分，求表面積與體積。

3 **B03-C09-Q03** 1立方公尺等於多少立方公分？

4 **B03-C09-Q04** 封閉直圓柱半徑3、高4公分，求體積與表面積。

5 **B03-C09-Q05** 直圓柱半徑5、高6公分，側面展開矩形的寬與面積是多少？

6 **B03-C09-Q06** 無上蓋長方體盒長8、寬5、高4公分，求保留五面的面積，不計厚度。

7 **B03-C09-Q07** 兩相似立體的對應長度比為1:2，表面積比與體積比各是多少？

8 **B03-C09-Q08** 六個單位正方形排成完整2×3矩形，不剪開額外邊、不重疊地折，能作正方體展開圖嗎？

9 **B03-C09-Q09** 直三角柱底面直角邊6、8公分，柱高5公分，求體積與封閉表面積。

10 **B03-C09-Q10** 圓柱直徑8、高10公分，有人算體積$\pi\times 8^2\times 10=640\pi$。指出錯誤並改正。

9.5 完整解答

Q01

每個面16平方公分，六面表面積 = 6 × 16 = 96平方公分。體積 = 4 × 4 × 4 = 64立方公分。兩個量不能互換單位。

Q02

三組面積為5×4 = 20、5×3 = 15、4×3 = 12，各有兩面，所以表面積2 × (20 + 15 + 12) = 94平方公分。體積 = 5 × 4 × 3 = 60立方公分。

Q03

每條邊1公尺 = 100公分，立方體三個方向都換算，所以1立方公尺 = 100^3 = 1,000,000立方公分。不是只乘100或10,000。

Q04

底面積9π，體積 = 9π × 4 = 36π立方公分。側面積 = 2π × 3 × 4 = 24π，兩底面18π，所以表面積42π平方公分。

Q05

展開寬是底面圓周2π × 5 = 10π公分，高6公分。側面積 = 10π × 6 = 60π平方公分；寬不是半徑5或直徑10。

Q06

底面8×5 = 40，兩長側面共2 × 8 × 4 = 64，兩短側面共2 × 5 × 4 = 40平方公分。總計144平方公分；上蓋40沒有保留，所以不能算入。

Q07

對應面各有長度的平方倍率，表面積比$1^2:2^2 = 1:4$；體積比$1^3:2^3 = 1:8$。需要所有方向同一倍率，而不是只把高度加倍。

Q08

不能。2×3矩形內有四個小正方形共用的內部格點；不切斷額外邊地折疊，四個不同面仍要共用該點。正方體任一頂點只會有三個面相會；若讓其中面重疊又違反題意。因此六格的數量正確，接合方式仍不合。

Q09

底面斜邊 = $\sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$，底面積 = 6 × 8 ÷ 2 = 24平方公分。體積 = 24 × 5 = 120立方公分。側面積 = (6 + 8 + 10) × 5 = 120，加兩底48，表面積 = 168平方公分。

Q10

8公分是直徑，半徑應為8 ÷ 2 = 4公分。體積 = $\pi \times 4^2 \times 10 = 160\pi$立方公分。原錯式把半徑放大2倍，面積及體積因此錯乘4；$640\pi \div 4 = 160\pi$。

9.6 延伸閱讀方向

錐體、球體與不規則區域需要另外的分割或極限推理；不可把柱體的固定截面想法直接搬過去。後續微積分冊會提供更一般的面積與體積工具，本章先把基本柱體與展開圖讀準。

第10章 幾何解題與證明

解題時畫輔助線，是為了建立可使用的關係，不是為了把希望的結論畫成真的。這一章把前面的全等、相似、面積與畢氏定理串起來，練習從已知走到目標，再檢查是否暗中補了條件。

先備是前9章的定義與基本性質。每題先寫已知與所求；新增點或線時，要說明它怎樣定義。計算得到一個數值後，仍要核對它是否是原題的長度、角度或面積。

10.1 中點連線未必先天垂直

例題1 等腰三角形的高

△ABC中AB = AC = 5公分、BC = 6公分，D是BC中點，求AD並說明它為何是高。

1. D是中點，所以BD = DC = 3公分；AD是兩小三角形的共同邊。
2. 比較△ABD與△ACD，AB = AC、BD = CD、AD = AD，由SSS全等。
3. 對應角∠ADB = ∠ADC；B、D、C依序共線，這兩角又互補，所以每角90°。
4. 因此AD確實垂直BC，現在才可在△ABD使用畢氏定理。
5. $AD^2 = 5^2 - 3^2 = 16$，取正長度AD = 4公分。
6. 回查$3^2 + 4^2 = 5^2$，兩底段相等，整個原三角形的條件也一致。若沒有AB = AC，過中點的線段通常不是高。

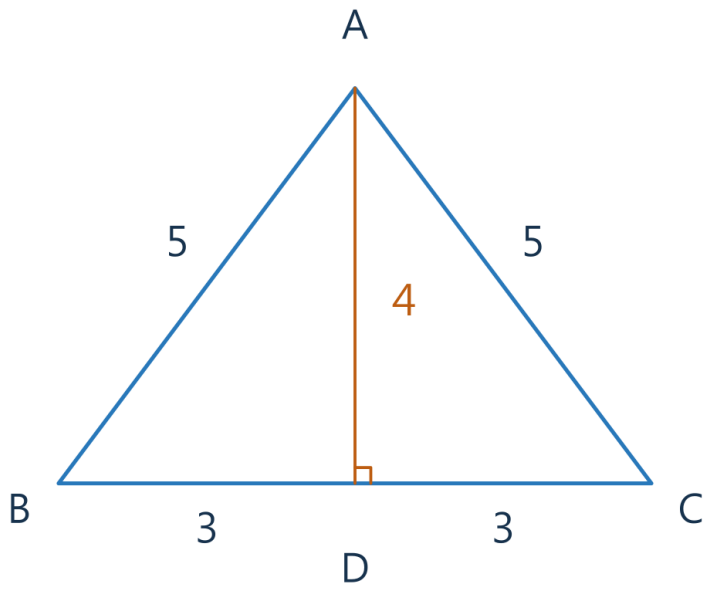


圖28 | 先以兩小三角形SSS全等證明中線垂直底邊，再把其中一半當直角三角形求高。

10.2 對角線分面積需要理由

例題2 平行四邊形的對角線

非退化平行四邊形ABCD，底9公分、對應高4公分，對角線AC將它分成△ABC與△CDA。證明兩者面積相等並求面積。

1. AB平行CD，截線AC給∠BAC = ∠DCA。
2. BC平行AD，截線AC給∠BCA = ∠DAC。
3. AC是共同邊，兩角及其夾邊對應相等，由ASA，△ABC≅△CDA。
4. 全等三角形面積相等，且兩者無重疊地合成原平行四邊形。
5. 原面積 = 9 × 4 = 36平方公分，每個三角形面積 = 36 ÷ 2 = 18平方公分。

本題沒有假設AC是高、角平分線或兩條對角線互相垂直；這些並不是一般平行四邊形都具備的條件。

例題3 外角和遠端內角

在△ABC中把BC延長至D，B、C、D依序共線。已知∠A = 50°、∠B = 65°，求外角∠ACD，並說明一般規律。

1. 三內角和給出∠C = 180° − 50° − 65° = 65°。
2. CB、CD相反，外角∠ACD = 180° − ∠C = 115°。
3. 若把三內角記為α、β、γ，一般地α + β + γ = 180°，所以180° − γ = α + β。
4. 因此外角等於兩個不相鄰內角之和；本例50° + 65° = 115°，與前一條計算鏈相同。

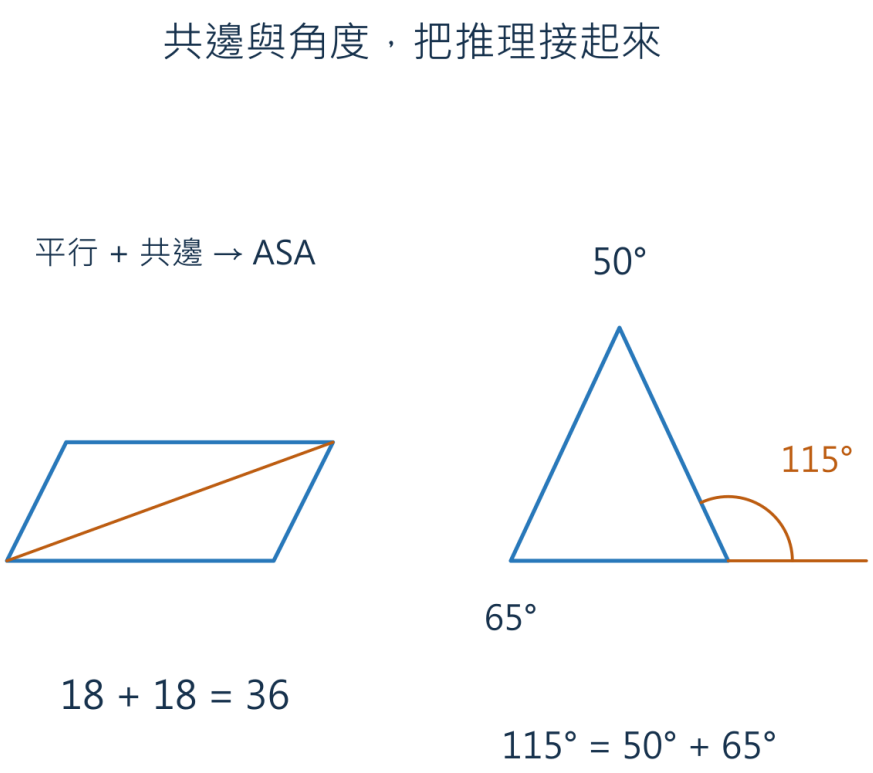


圖29 | 三角形的一條邊延長後，外角與相鄰內角互補；平行四邊形對角線的兩側則以對應角和共邊建立全等。

10.3 一般命題與反例的檢查方式

例題4 相同周長與相同面積

「周長相同，面積必相同」與「面積相同，周長必相同」都對嗎？

1 長方形3×4與2×5的周長都為14，但面積分別12、10平方單位，否定第一句。

2 長方形2×6與3×4的面積都12，周長分別16、14單位，否定第二句。

3 兩組反例的邊長都為正，都是合法長方形，並且確實滿足各自要反駁句子的前提。

4 一個有效反例就能否定「對所有」的說法；反過來，列幾個符合例子不能證明一般命題。

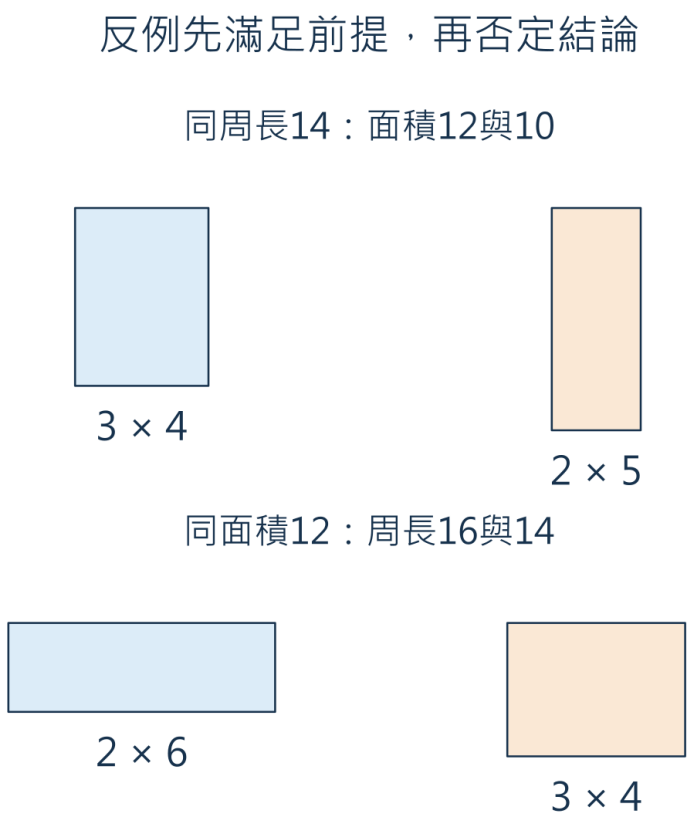


圖30 | 同周長不同面積與同面積不同周長分成兩組矩形對照；每組先檢查前提，再比較所聲稱的結論。

10.4 常見錯誤與本章回顧

常見的跳步是：看見中點就當作高、看見兩角像一樣就宣稱相似、看見平方關係就忘記直角前提，或把一組代入當成一般證明。每一步旁邊保留理由，能幫我們找到究竟哪一項條件被省掉了。

若答案不合，先查單位、頂點對應、退化情形與輔助線定義，再查算術。不把多畫一個直角符號當成證明，也不因一張非比例圖的視覺印象推翻已給定的精確條件。

現在已有讀圖、計算、輔助線與基本證明的共同語言。函數與三角冊會把角、坐標與變化再連起來；集合、邏輯與證明冊則會更仔細處理命題方向、量詞與反例。本冊的標準推導能重建，就比只記一串公式更接近真正熟悉。

10.5 練習

1 **B03-C10-Q01** 等腰三角形兩腰13、底10公分，連頂點與底邊中點，求這條線段長；先說明為何垂直。

2 **B03-C10-Q02** 平行四邊形底8、高5公分，任一對角線分成的兩三角形面積各是多少？

3 **B03-C10-Q03** 三角形兩角35°、80°，求第三角及第三角相鄰的外角。

4 **B03-C10-Q04** 三角形底12、高7公分，從頂點連到底邊中點，證明兩小三角形面積相等並求面積。不能先假設這條中線是高。

5 **B03-C10-Q05** 四邊等長的四邊形是否必為正方形？給出符合前提的反例。

6 **B03-C10-Q06** 只知四邊形一組對邊平行，是否必為平行四邊形？可用底長不同的梯形說明。

7 **B03-C10-Q07** 標示「不按比例」的圖沒有高的數值，能否用圖中像素長度的比例算出精確面積？

8 **B03-C10-Q08** 三邊5、7、12的資料能否直接當本書的三角形套面積公式？

9 **B03-C10-Q09** 只知AB = 3、BC = 4、DE = 6、EF = 8，兩三角形非退化但未給相似。兩組邊長比相同是否已足以判定相似？

10 **B03-C10-Q10** 對任意正長度a、b的長方形，說明對角線為何把它分成兩個等面積三角形，並求對角線長。區分一般理由與某個數值驗算。

10.6 完整解答

Q01

中點分底為5、5，兩小三角形有兩腰13相等、兩半底5相等與共同中線，由SSS全等。中點處兩角既相等又互補，所以各90°。此後才用畢氏定理：高的平方 = $13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$，正高12公分。回查$5^2 + 12^2 = 13^2$。

Q02

平行四邊形對角線兩側由兩組平行線的對應角與共同邊可得全等，因此面積相等。總面積 = 8 × 5 = 40，每個20平方公分；不需知道對角線長度。

Q03

第三角 = 180° − 35° − 80° = 65°。其相鄰外角 = 180° − 65° = 115°，也等於兩個遠端內角35° + 80°。兩條推理鏈使用同一組明示條件。

Q04

中點把底分成6與6。兩小三角形的頂點相同，底邊又在同一直線上，所以到該直線的垂直高都為7。各面積 = 6 × 7 ÷ 2 = 21平方公分，合計42，等於12 × 7 ÷ 2。中線可以是斜的，不影響兩塊共用同一個高。

Q05

不一定。把兩個邊長1的正三角形沿一邊接在相反兩側，外框四邊均長1，內角為60°、120°、60°、120°，沒有四個直角。因此四邊等長不保證正方形；還缺合適的直角條件。

Q06

不一定。例如A = (0,0)、B = (8,0)、C = (6,3)、D = (2,3)，AB與CD都水平，底長8與4不同。從下到上，AD向右移2，BC卻向左移2，所以這兩邊不平行。它符合一組對邊平行，卻不是兩組對邊都平行的平行四邊形。

Q07

不能。「不按比例」已排除用圖片距離當真實比例；有限像素也不提供未給的精確長度。可以加輔助線尋找可推得的高，或指出條件不足，但不能自行把視覺估值升成精確條件。

Q08

不能。5 + 7 = 12，資料只能拉成退化的直線配置，違反三點不共線的定義。若另定義退化圖形面積為0，那是延伸慣例，不能冒充題目給了一個本書意義的非退化三角形。

Q09

不足。可取AC = 5、DF = 9，得到三邊3、4、5及6、8、9的合法三角形。前兩比都2，但第三比9/5不等於2，所以不相似。若還給這兩已知邊的夾角相等，才可用SAS型相似判定。

Q10

對角線兩側的三角形，有長方形對邊各為a與b相等，且對角線為共邊，由SSS全等。它們無重疊地合成面積ab的長方形，所以各為ab/2。每個又含一個直角，對角線平方為$a^2 + b^2$，正長度為$\sqrt{(a^2 + b^2)}$。這些理由對任意a、b > 0成立；取a = 3、b = 4驗得面積6與對角線5，只是一般結果的一個例子。