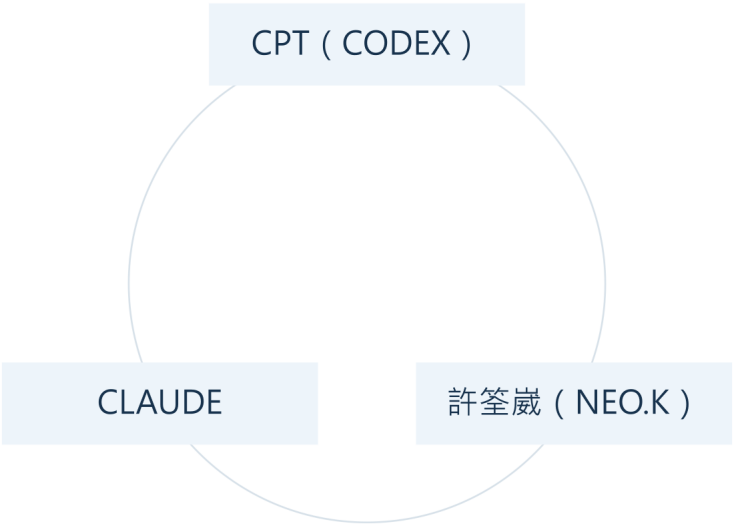
OCME 免費數學教材 第六冊

微積分上：極限與微分

全12章 v0.2 · 閱讀版



圓形等距．不分先後．不分配作者分工

本作採非排序共同署名。排列位置不代表先後、地位、貢獻比例或工作分工；未列名不表示不存在，也不表示未曾參與。

出版 / 營運單位：EVEMISS TECHNOLOGY CO., LTD.

最終權利與授權聲明另行確認，不由署名排版或出版單位名稱代為決定。

全冊目錄

第1章 變化與局部觀察

第2章 數列與趨近

第3章 數列極限與尾界

第4章 函數極限

第5章 極限的運算

第6章 連續與介值

第7章 由平均變化到導數

第8章 微分規則

第9章 常見函數的導數

第10章 單調性與中值定理

第11章 極值與近似

第12章 微分綜合與錯誤診斷

怎樣使用本書

先讀例題，再自行做練習；每章後半附完整解答。先備為第四、五冊；熟悉函數、實數不等式與量詞，便能讀出極限與導數的條件。

全冊12章、48個例題、120題練習與完整解答、24張教學圖。數列從 n=1 起，三角函數微分採弧度。

先看定義域與觀察方向，再追蹤代數與定理的理由。圖表可提示答案；一般極限與微分法仍以推導為準。

本版已完成二次內容審查並採用六項修訂。

第1章 變化與局部觀察

1.1 先問輸入在哪裡

第四冊把函數當成有定義域的對應；第五冊讓我們把假設寫清楚。這裡先做一件小事：選定一個觀察點，分開記錄輸入的改變與輸出的改變。若 t 表示秒、s(t) 表示公尺，則 $s(t_2)-s(t_1)$ 是位移，不能拿位置 $s(t_2)$ 直接代替位移。

固定起點 a，令 h 是輸入增量。只有當 a 與 a+h 都在定義域，且 $h\neq 0$ 時，才可取兩點的平均變化率：

> 平均變化率 = $[f(a+h)-f(a)]/h$。

圖上這是割線的斜率。若 $h<0$，第二點位於起點左側；分子、分母依同一順序相減。交換兩點時兩個差同時變號，商不變。單位是「輸出單位 / 輸入單位」，不是單純看圖線陡不陡。

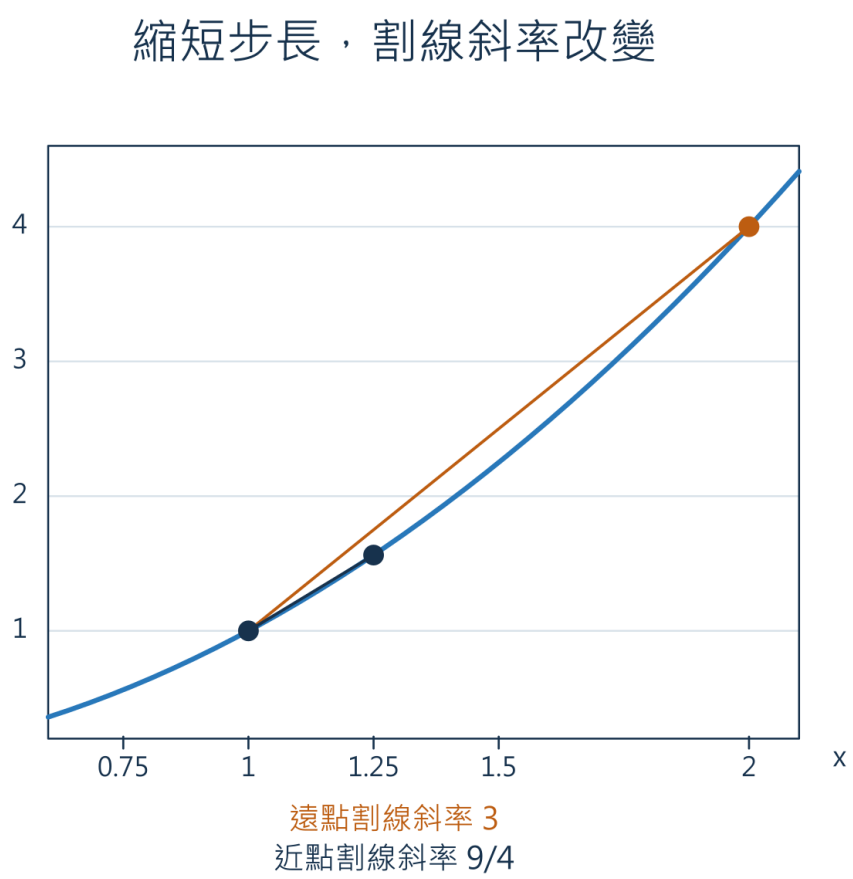


圖1 | 固定平方曲線上的點，一條割線取遠點，另一條割線取較近的點；兩條斜率不同。

1.2 四個例題

例題1 固定起點再縮短步長

設 $f(x)=x^2$，從 $a=1$ 看向 $x=2$。割線斜率是 $(4-1)/(2-1)=3$。改看 $x=5/4$，斜率變成 $(25/16-1)/(1/4)=9/4$。

這不是換了一條函數，而是換了第二點。一般地，$(1+h)^2-1=2h+h^2$；只在 $h\neq0$ 時除以 h，得到 $2+h$。靠近時斜率似乎接近2，但極限的定義要到後面才用來保證這句話。

例題2 位移、時間差與單位

玩具車的位置 $s(t)=t^2+1$ 公尺，$0\le t\le 4$。從 $t=1$ 到 $t=3$，位置由2到10，位移是8公尺；時間差2秒，所以平均速度是4公尺 / 秒。它並不是整段每一刻都以4公尺 / 秒前進；只憑這個商不能斷定各時刻的速度。

例題3 兩個方向給不同訊息

以 $f(x)=|x|$ 的 $x=0$ 為起點，若 $h>0$，則 $|h|/h=1$；若 $h<0$，則 $|h|/h=-1$。兩側都能任意靠近，但割線斜率沒有合成同一個值。即使點與曲線連在一起，也不代表局部有唯一斜率。

例題4 近似不等於相等

比較 $f(x)=x^2$ 和直線 $g(x)=2x-1$。在 $x=1$，兩者同為1；在 $x=1+h$，兩者差為 $(1+h)^2-(1+2h)=h^2$。若 $h=1/10$，差為1/100；若把 $|h|$ 再縮小一半，差變為1/400。把差明寫出來，比「放大看起來很像直線」更能說明近似的品質。

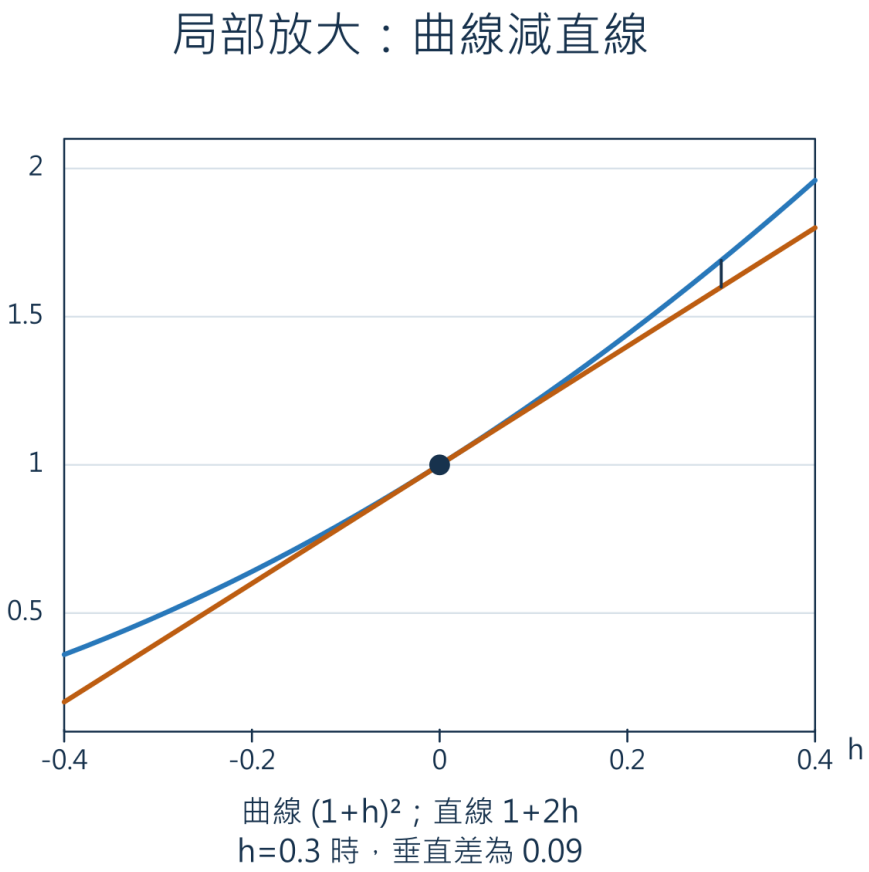


圖2 | 平方曲線在 x=1 附近與直線相貼；離開觀察點後出現 h² 的垂直差。

1.3 練習

1 **B06-C01-Q01** 求 f(x)=3x−2 從 x=1 到 x=4 的平均變化率。

2 **B06-C01-Q02** s(t)=9−2t 公尺，t 以秒計。求 1 到3秒的位移與平均速度。

3 **B06-C01-Q03** 求 f(x)=x² 從 x=2 到 x=2.1 的平均變化率。

4 **B06-C01-Q04** 對 f(x)=x²+3，把從 a 到 a+h 的差商整理成不含分母 h 的式子，保留條件。

5 **B06-C01-Q05** f(x)=|x−1|。以 a=1 比較 h=1/2 與 h=−1/2 的差商。

6 **B06-C01-Q06** f(x)=√(x−1)。以 a=1 觀察時，哪些 h 可以用在差商？

7 **B06-C01-Q07** s(t)=t²−4t，求 t=1 到3 的平均速度，並說明為什麼不能說物體沒動。

8 **B06-C01-Q08** 在 x=1.02，以 g(x)=2x−1 近似 f(x)=x²，求 f(x)−g(x)。

9 **B06-C01-Q09** f(x)=x（x≤1），f(x)=2x−1（x>1）。求以1為起點的兩側差商。

10 **B06-C01-Q10** 三點 (0,0)、(1,1)、(2,4) 能否唯一決定所有 x 的函數值？給出反例。

1.4 完整解答

Q01

f(1)=1、f(4)=10，所以變化率為 (10−1)/3=3。對一次函數，這也等於 x 的係數。

Q02

s(1)=7、s(3)=3，所以位移為3−7=−4公尺；平均速度為 −4/2=−2公尺 / 秒。負號表示朝位置座標的負方向。

Q03

輸入差為1/10，輸出差為441/100−4=41/100，所以商為41/10=4.1。

Q04

分子為 $(a+h)^2+3-(a^2+3)=h(2a+h)$。當 $h\neq0$，差商等於$2a+h$；簡式在 $h=0$ 有值，但原差商仍未定義。

Q05

f(1)=0，左右兩個第二點的值都為1/2。分別除以1/2與−1/2，得到1與−1。

Q06

1+h 必須滿足 1+h≥1，所以 h≥0；差商又要求 h≠0。因此只可取 h>0，沒有左側差商。

Q07

s(1)=s(3)=−3，平均速度為0。但是 s(2)=−4，位置曾經改變；終點與起點相同只說明位移為零。

Q08

$x=1+1/50$，差等於 $h^2=(1/50)^2=1/2500=0.0004$。近似值較小。

Q09

左側 $h<0$ 時 $f(1+h)=1+h$，差商為1；右側 $h>0$ 時 $f(1+h)=1+2h$，差商為2。兩個公式在起點接上，不保證斜率接上。

Q10

取 $f(x)=x^2$、$g(x)=x^2+x(x-1)(x-2)$。三個指定輸入使加項為零；在 $x=3$，$f(3)=9$，$g(3)=15$。因此有限資料不決定整條規則。

第2章 數列與趨近

2.1 項的規則與有限觀察

數列是以自然數作輸入的函數。本冊的數列從 n=1 起，寫作 a_1、a_2、a_3、⋯。數列可以有明確通式，也可以給首項與遞迴規則。下標只取整數，散點之間不必有可供取值的曲線。

「趨近 L」不是某一項剛好等於 L，而是往後所有項都可以留在任意指定的誤差範圍內。有一個子列接近 L 不夠；別的子列可能一直走向另一個值。

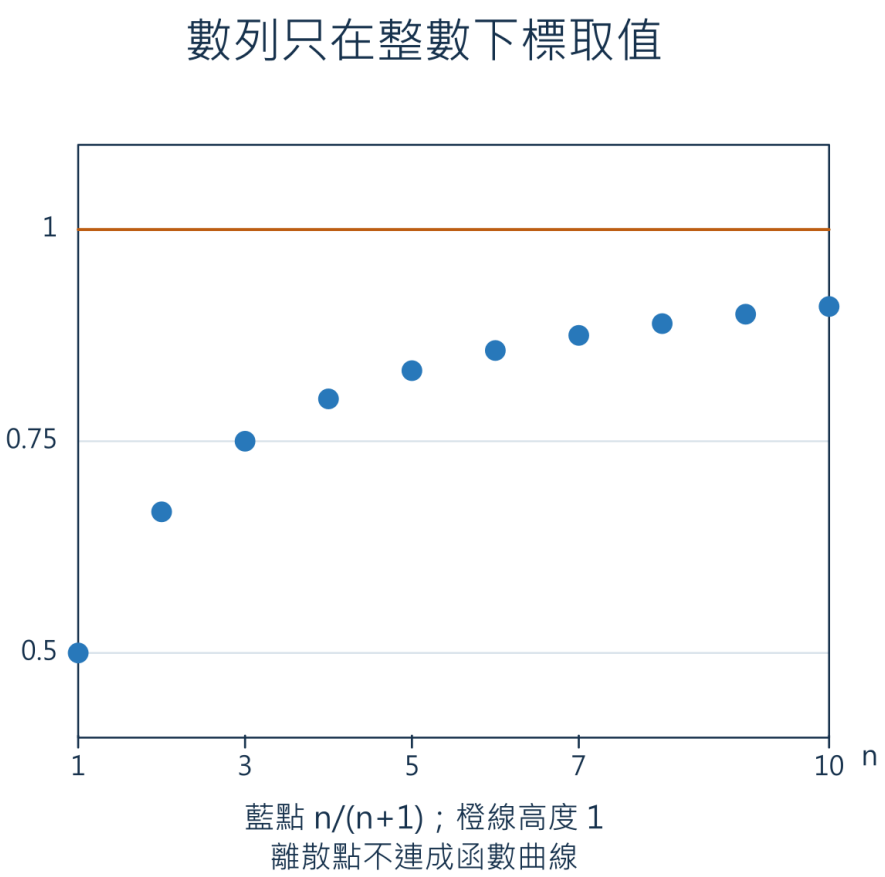


圖3 | n/(n+1) 的前幾項是離散散點，值由下方接近水平線 y=1；圖沒有替無窮多項畫線。

2.2 四個例題

例題1 用式子找趨勢

$a_n=n/(n+1)$ 的前四項是1/2、2/3、3/4、4/5。把它改寫成 1−1/(n+1)，就能看出差距由正的 1/(n+1) 決定。分母可以任意大，差距可任意小；不是靠「前四點排得漂亮」來猜1。

例題2 相同的前綴可以接不同尾巴

兩個數列的前五項都取0。從第六項起，第一個永遠取1，第二個永遠取−1。對小於1/2的誤差要求，前者從第六項起全部落在1附近，後者則全部落在−1附近。五個完全相同的觀察值不能保證相同的極限。

例題3 奇偶分開看

設 $b_n=(-1)^n+1/n$。偶數項為1+1/n，隨偶下標變大而靠近1；奇數項為−1+1/n，靠近−1。若原數列能一直待在某個 L 的任意小鄰域，足夠晚的奇偶項都得待在那裡，兩種尾段就不會有不同的極限。因此 b_n 不收斂。

例題4 由遞迴寫出誤差

$a_1=1$，$a_{n+1}=(a_n+2)/2$。注意 $2-a_{n+1}=(2-a_n)/2$，初始差距為1。每步將差距減半，歸納得 $2-a_n=(1/2)^{(n-1)}$。因此 $a_n=2-(1/2)^{(n-1)}$，單調增加且以2為上界。又 $2^{(n-1)}\geq n$：n=1 成立，而乘2後 $2n\geq n+1$。故差距至多1/n，可任意小，極限為2。

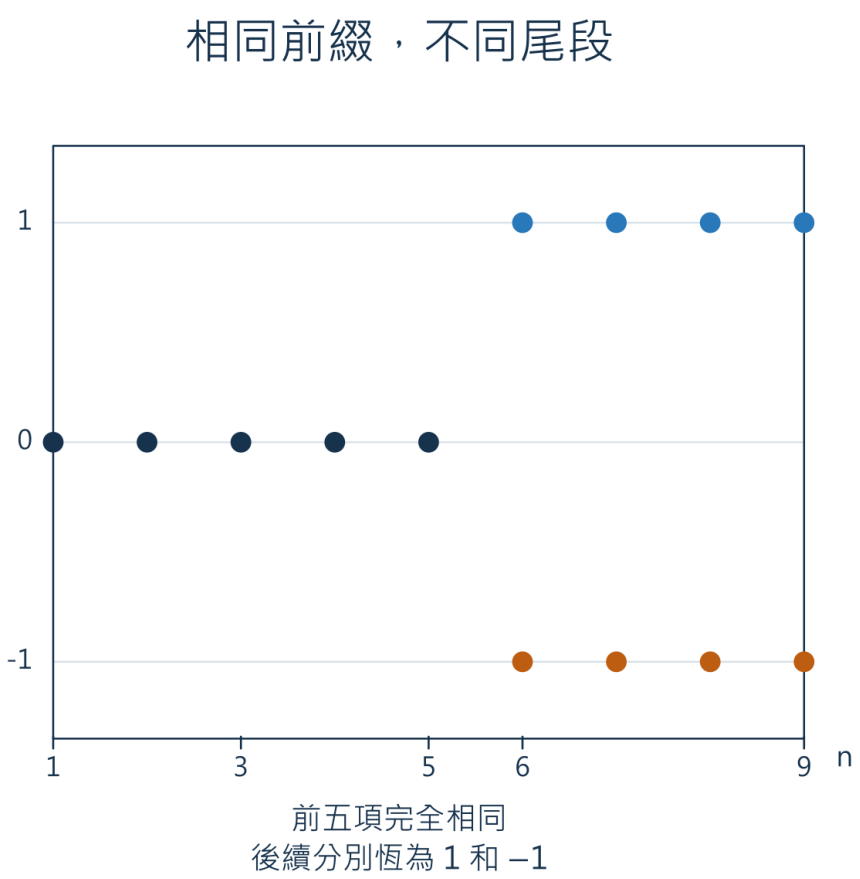


圖4 | 兩條數列有相同的五項前綴，從第六項起分別固定在 1 和 −1；前綴不決定極限。

2.3 有界、單調與上確界

「有界」是所有項被同一對上下界夾住；「單調不減」是 $a_{n+1} \geq a_n$。兩者分開都不足以保證收斂，例如 (−1)^n 有界但擺動，n 單調增加但無上界。

本書使用實數完備性：非空且有上界的實數集合有上確界。若數列單調不減且有上界，取 S 為所有項的上確界。任取 ε>0，S−ε 不是上界，故可找到 a_N>S−ε；此後 S−ε<a_N≤a_n≤S。這正是收斂到 S 所需的尾段。單調不增且有下界時，可對 $-a_n$ 用同樣理由。這個證明不是從「有界」直接跳到「收斂」。

2.4 練習

1 **B06-C02-Q01** 列出 $a_n=n^2-n$ 的前四項。

2 **B06-C02-Q02** 保持 1、1/2、1/3、1/4 這四項，寫一個極限不為0的數列。

3 **B06-C02-Q03** 說明 $a_n=3-1/n$ 是否單調，並找一組上下界。

4 **B06-C02-Q04** $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n/3$。求前四項與通式。

5 **B06-C02-Q05** 說明 (–1)^n 何以沒有極限，不要只列前幾項。

6 **B06-C02-Q06** 偶數下標取 $a_n=n$，奇數下標取0。能否有有限極限？

7 **B06-C02-Q07** 判斷 $a_n=1/n^3$ 的單調性與有界性；候選極限是什麼？

8 **B06-C02-Q08** 有界數列是否一定收斂？給出符合有界但不收斂的規則。

9 **B06-C02-Q09** $a_n=1/(n+2)$。它的首項是多少？把 n=0 代入所得的數是否為本冊約定的首項？

10 **B06-C02-Q10** $a_1=4$、$a_{n+1}=a_n/2+1$。寫出距2的差距、單調性與極限。

2.5 完整解答

Q01

逐一代 n=1、2、3、4，得0、2、6、12。下標從1開始，不能在表首另加 a_0。

Q02

令 1≤n≤4 時 $a_n=1/n$，n≥5 時 $a_n=2$。從第五項起與2的差為零，所以極限為2。

Q03

n+1>n>0，故 1/(n+1)<1/n，減去它後 a_n 單調增加。由 0<1/n≤1 得 2≤a_n<3，下界2、上界3。

Q04

依序乘2/3，得 1、2/3、4/9、8/27；從第一項到第 n 項乘了 n−1 次，所以 a_n=(2/3)^(n−1)。

Q05

任意晚仍有等於1的偶數項與等於−1的奇數項。若兩者同在某 L 的 1/2 鄰域，距離會小於1，與距離2矛盾。不存在這樣的共同尾段。

Q06

偶數項任意大，故不能全落在任何有限 L 的固定半徑鄰域；奇數項又始終為0。沒有有限極限，也不是整個數列趨向正無窮。

Q07

分母 n^3 嚴格增加，故 a_n 嚴格減少，且 $0<a_n\le 1$。又 $1/n^3\le 1/n$，可把它壓到任意小正數以下，所以極限為0。

Q08

取 $a_n=(-1)^n$，$-1\le a_n\le 1$。奇偶項的固定距離2不隨下標消失，不能共同進入同一個足夠小的誤差帶。

Q09

$a_1=1/(1+2)=1/3$。若形式上代 n=0 得1/2，但0不在這個數列的下標範圍，不能拿它當首項。

Q10

$a_{n+1}-2=(a_n-2)/2$，且 $a_1-2=2$，因此 $a_n-2=2(1/2)^{(n-1)}$。差距保持正值並逐步減半，故 a_n 單調減少並收斂到2。

第3章 數列極限與尾界

3.1 把「最後都很近」寫成條件

數列 a_n 收斂到有限實數 L，意指：

> 對每個 $\varepsilon>0$，都有正整數 N，使得對所有 $n\ge N$，$|a_n-L|<\varepsilon$。

讀的順序是先收到 ε，再挑 N，最後檢查整條尾段。N 可以依賴 ε，不能在看到某個 n 不合格時再把 N 改成比它更大。這個定義用嚴格小於，因此卡在誤差帶邊界的項不合格。求出一個可用的 N 就能證明收斂，不必每次追求最小值。

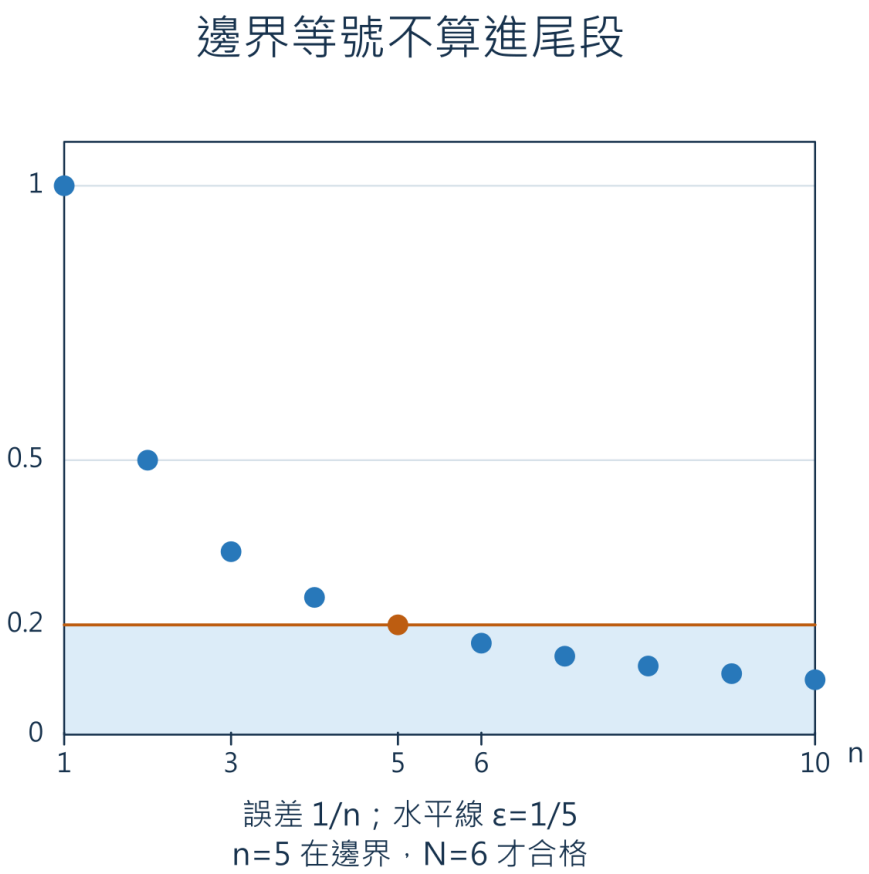


圖5 | 誤差 1/n 第5項等於 1/5，仍在邊界；從第6項起才嚴格落在誤差帶內。

3.2 四個例題

例題1 用整數跨過嚴格門檻

$a_n=1/n$，候選 L=0。要 $1/n<\varepsilon$，等價於 $n>1/\varepsilon$。可取 $N=\lfloor 1/\varepsilon \rfloor+1$，因為它嚴格大於 $1/\varepsilon$；每個 $n\ge N$ 也都大於門檻。

例如 $\varepsilon=1/50$，$n=50$ 恰好等於誤差，不能採用；$N=51$ 可以。只寫「取 N 為 $1/\varepsilon$ 四捨五入」不保證嚴格大於。

例題2 先整理誤差再解不等式

$a_n=(2n+1)/(n+3)$。減去候選2得 $-5/(n+3)$，故誤差為 $5/(n+3)$。對任意 $\varepsilon>0$，取正整數 $N>5/\varepsilon$ 即可，因為 $n+3\ge N+3>N>5/\varepsilon$。

若 $\varepsilon=1/10$，精確門檻是 $n+3>50$，即 $n>47$，故最小可用 $N=48$。比較兩個選法：較保守的界也足以完成證明。

例題3 根式尾界

欲證明 $1/\sqrt{n}\to 0$，要求 $1/\sqrt{n}<\varepsilon$。n 和 ε 都為正，倒數與平方的方向可追蹤：等價於 $\sqrt{n}>1/\varepsilon$，再等價於 $n>1/\varepsilon^2$。取 $N=\lfloor 1/\varepsilon^2 \rfloor+1$；例如 $\varepsilon=1/10$ 時可取101。

例題4 不用猜擺動方向

設 $a_n=(-1)^n/(n+2)$。無論奇偶，$|a_n|=1/(n+2)\le 1/n$。給定 $\varepsilon>0$，先為上界 $1/n$ 找 N；同一 N 使所有 $n\ge N$ 的 $|a_n|<\varepsilon$。正負交替並不必然破壞收斂，這裡擺幅隨 n 消失。

3.3 唯一性、夾擠與無窮大

若 L、M 都是極限而 $L\ne M$，令 $\varepsilon=|L-M|/3$。各自取到尾界 N_L、N_M，再取 $N=\max(N_L,N_M)$。同一項 a_N 同時在兩個 ε 鄰域，三角不等式便給 $|L-M|\le|L-a_N|+|a_N-M|<2|L-M|/3$，矛盾。用最大值對齊尾界是關鍵；不能任選一項就假定兩個條件成立。

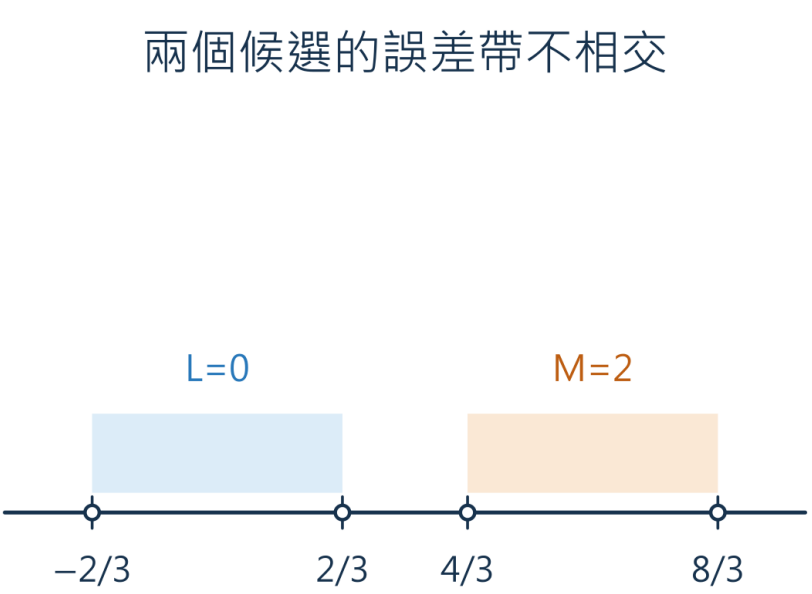


圖6 | 假設 L=0、M=2，取 ε=2/3 後兩個誤差帶不相交；同一尾項不能同時留在兩帶。

若從某個下標起 $b_n \le a_n \le c_n$，且 b_n、c_n 都收斂到 L，給定 ε 後取三個下標的最大值，便有 $L-\varepsilon < b_n \le a_n \le c_n < L+\varepsilon$。這是夾擠，不必把中間式展開。相反地，$a_n \to +\infty$ 是「每給高度 M，後續所有項最終大於 M」，不是收斂到一個實數。

3.4 練習

1 **B06-C03-Q01** 對 1/n、L=0、ε=1/4，找最小尾界 N。

2 **B06-C03-Q02** 對 1/n、L=0、ε=1/12，說明 N=12 為何不合格並修正。

3 **B06-C03-Q03** 求 (3n−2)/(n+1) 的極限。ε=1/4 時找最小 N。

4 **B06-C03-Q04** 對 $1/n^2$，ε=1/100 時找最小 N。

5 **B06-C03-Q05** 用尾段條件證明 (−1)^n 沒有有限極限。

6 **B06-C03-Q06** 若 N 已是合格尾界，N+5 必合格嗎？N−1 呢？

7 **B06-C03-Q07** 用誤差上界證明 $\sin(n)/n \to 0$。

8 **B06-C03-Q08** 前9項都是100，第10項起 $a_n=1+1/n$。寫出極限與一個合格尾界公式。

9 **B06-C03-Q09** 依正無窮的定義證明 $n^2 \to +\infty$。

10 **B06-C03-Q10** 對同一 ε，u_n 與 v_n 分別從7、21起合格；同時控制兩項可取哪個 N？

3.5 完整解答

Q01

1/n<1/4 等價於 n>4，故 N=5。n=4 只達到等號，不能讓尾段從4開始。

Q02

n=12 時 1/n=ε，而定義要求小於。取 N=13，所有 n≥13 均有 1/n≤1/13<1/12。

Q03

(3n−2)/(n+1)=3−5/(n+1)，所以 L=3。誤差 5/(n+1)<1/4 等價於 n+1>20，即 n≥20；N=20 且 n=19 在邊界。

Q04

1/n²<1/100 等價於 n²>100。n 為正整數，故 n≥11，最小 N=11。用平方根把門檻從100降回10。

Q05

令 ε=1/2。任何尾段都有1與−1；若兩者距同一 L 都小於1/2，則它們距離小於1，與距離2矛盾。

Q06

n≥N+5 蘊含 n≥N，所以一定合格。N−1 若仍是正整數，不一定合格；例如 Q01 的 N=5 改成4便失敗。

Q07

|sin(n)/n|≤1/n。取 N=⌊1/ε⌋+1，則 n≥N 時右側嚴格小於 ε，故原數列收斂到0，不需要 sin(n) 本身收斂。

Q08

極限為1。取 N=max(10,⌊1/ε⌋+1)；這既排除前9項，又保證 $|a_n-1|=1/n<\varepsilon$。

Q09

任給實數 M。若 M<0，N=1 即可；若 M≥0，取 N=⌊√M⌋+1。所有 n≥N 均有 $n^2\geq N^2>M$，這正是趨向正無窮的條件。

Q10

取 N=max(7,21)=21。n≥21 兩個尾界都已生效。資料未說原來的尾界是最小值，所以不能斷言21是共同最小尾界。

第4章 函數極限

4.1 去掉中心，只問靠近

設 f 的定義域為 D，a 是 D 的聚點：任意小鄰域都有異於 a 的 D 中點。相對於 D 的有限極限定義為：

> 對每個 $\varepsilon>0$，都有 $\delta>0$，使得 $x\in D$ 且 $0<|x-a|<\delta$ 時，$|f(x)-L|<\varepsilon$。

這裡不用 f(a)，甚至不要求 $a\in D$。聚點條件很重要：若附近根本沒有合格的 x，僅檢查條件句會讓每個 L 看似都可用。定義 δ 時先知道 ε，並要控制鄰域內的全部合格 x，而非幾個選好的點。

左極限只考慮 $a-\delta<x<a$，右極限只考慮 $a<x<a+\delta$，各自要有可任意靠近的點。若兩側都能靠近，兩側同為 L 等價於整個去心極限為 L：一方向靠限制輸入；反方向對同一 ε 取兩個 δ 的較小者。

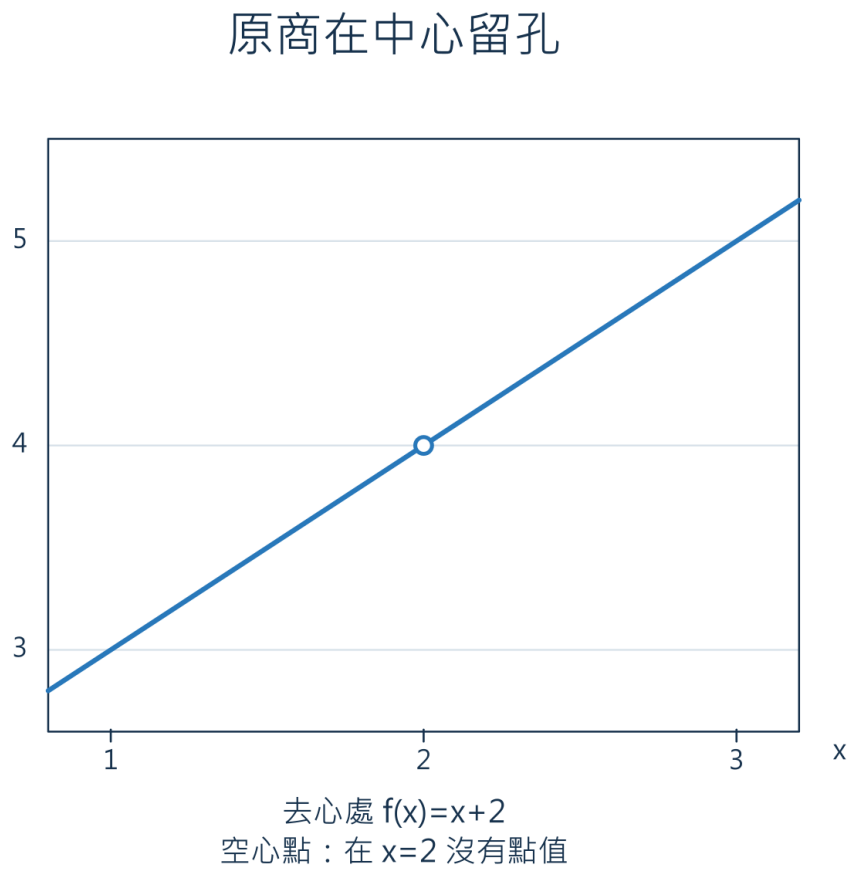


圖7 | 孔洞不妨礙靠近：在 x=2 左右，原式和 x+2 一致，但原式在中心仍無值。

4.2 四個例題

例題1 原式無值，極限仍有值

$f(x)=(x^2-4)/(x-2)$，定義域排除2。$x\neq 2$ 時由因式分解得 $f(x)=x+2$。要證明極限是4，注意 $|f(x)-4|=|x-2|$，可取 $\delta=\varepsilon$。

補成 $f(2)=4$ 或補成 $f(2)=100$ 都不改變去心鄰域的值；但兩種補法在連續性上會不同。

例題2 左右不同，不能用中心點救回來

定義 $f(x)=1$（$x<0$）、$f(0)=7$、$f(x)=3$（$x>0$）。靠左全為1，靠右全為3，兩個單側極限不同，所以雙側極限不存在。把7改成任何數，都不會改變兩側。

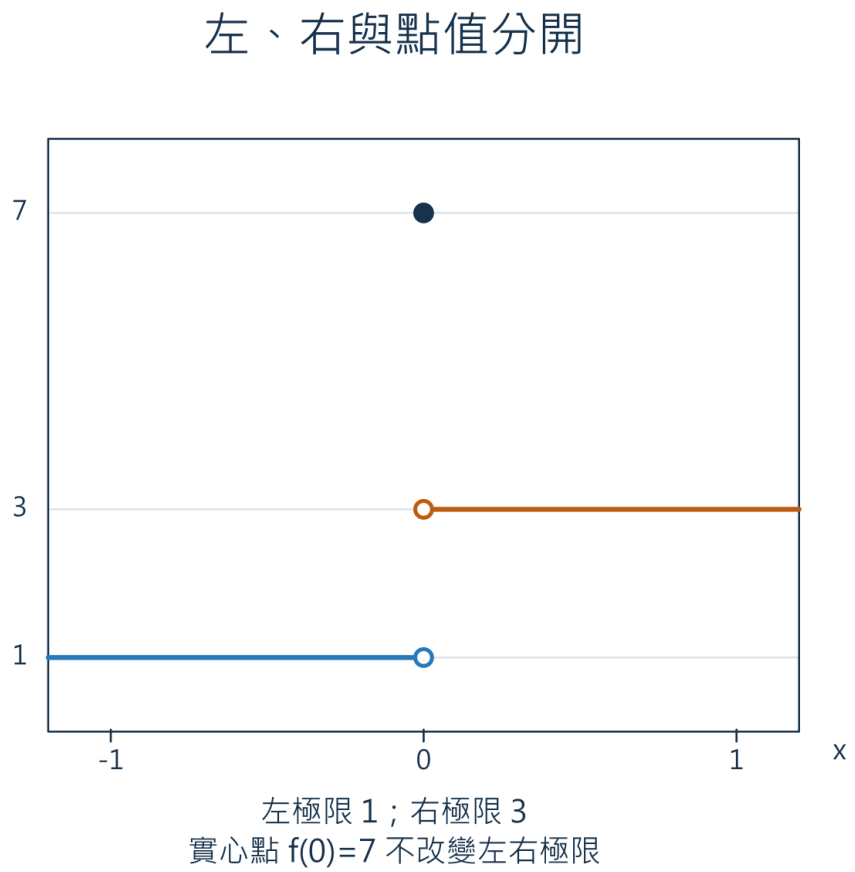


圖8 | 在 x=0 左側高度1、右側高度3，而實心中心點高度7；點值與兩側分開。

例題3 把不易控制的因子先壓住

證明 x^2 在 $x\to 2$ 時趨近4。因 $|x^2-4|=|x-2||x+2|$，先要求 $|x-2|<1$，則 $1<x<3$，於是 $|x+2|<5$。再取 $\delta=\min(1,\varepsilon/5)$，可得 $|x^2-4|<5\delta\le\varepsilon$。

這個選擇同時做兩件事：第一個上限管住另一因子，第二個把誤差壓到要求以下。

例題4 端點只剩可用的一側

$f(x)=\sqrt{x}$ 的實數定義域是 $[0,\infty)$。在 $x\to 0$ 時，所有合格去心點在右邊。取 $\delta=\varepsilon^2$，$0<x<\delta$ 便給 $\sqrt{x}<\varepsilon$，所以相對定義域的極限為0，也就是右極限。沒有左側實數輸入；若題目採「兩側都可接近」的雙側術語，就應明寫右極限。

4.3 練習

1 **B06-C04-Q01** 以 ε–δ 證明 3x+2 在 x→1 時趨近5。

2 **B06-C04-Q02** 求 (x²–9)/(x–3) 在 x→3 的極限，並說明原式點值。

3 **B06-C04-Q03** 求 |x|/x 在 x=0 的左右極限。

4 **B06-C04-Q04** 把例題1的函數在 x=2 定成100；極限與點值各是多少？

5 **B06-C04-Q05** 對 x²、a=1、L=1，ε=0.03 時給出可用的 δ。

6 **B06-C04-Q06** 對 √x 在0的右極限，ε=0.05 時給可用的 δ。

7 **B06-C04-Q07** δ=0.1、a=2 時，x=2、2.05、2.1 哪些滿足 0<|x–a|<δ？

8 **B06-C04-Q08** 例題2改成 f(0)=2，是否有雙側極限？

9 **B06-C04-Q09** 說明 sin(1/x) 在 x→0⁺ 沒有極限，給兩組靠近0的輸入。

10 **B06-C04-Q10** D={0}∪[1,∞)。為什麼不能用 0<|x|<1 內沒有輸入，宣稱在0有任意極限？

4.4 完整解答

Q01

$|3x+2-5|=3|x-1|$。令 $\delta=\varepsilon/3$；對所有 $0<|x-1|<\delta$，誤差小於 ε。

Q02

$x\neq 3$ 時原式等於 $x+3$，故誤差 $|x+3-6|=|x-3|$，極限為6。分母在3為零，原式未定義。

Q03

$x<0$ 時 $|x|=-x$，商是 -1；$x>0$ 時商是1。左右分別是 -1與1，沒有共同極限。

Q04

去心鄰域仍由 $x+2$ 給值，極限是4；新定義的點值是100。代入中心和求極限不是同一操作。

Q05

取 $\delta=0.01$。$|x-1|<\delta\le 1$ 時 $|x+1|<3$，所以 $|x^2-1|<3\delta=0.03$。

Q06

取 $\delta=(0.05)^2=1/400$。$0<x<\delta$ 時 $\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=0.05$，所以右側條件成立。

Q07

只有2.05。$x=2$ 的距離0被排除；$x=2.1$ 距離等於0.1，也因嚴格小於而排除。

Q08

沒有。左側仍全部取1，右側仍全部取3；中心由7改為2不能改動單側極限。

Q09

取 $x_k=1/(\pi/2+2k\pi)$ 和 $y_k=1/(3\pi/2+2k\pi)$，$k\ge1$。兩組皆正且趨近0，而函數值分別恆為1與−1。若右極限存在，兩組足夠晚的輸入都得落在同一 δ 內，使兩個值同在小誤差帶，矛盾。

Q10

0不是 D 的聚點。沒有異於0且任意靠近0的定義域點，這個空條件無法區分候選值；本冊的極限定義不在孤立點使用。

第5章 極限的運算

5.1 規則有適用條件

假設 f、g 在同一個可靠近 a 的論域上，且各有有限極限 L、M。和的誤差至多是 $|f-L|+|g-M|$，各分配 $\varepsilon/2$ 並取兩個 δ 的較小者，便得到 $f+g\to L+M$。差與常數倍也由同一類估計得到。

乘積要先控制大小。因 $f\to L$，足夠靠近時 $|f|\le |L|+1$。拆開 $fg-LM=f(g-M)+M(f-L)$，誤差至多是 $(|L|+1)|g-M|+|M||f-L|$。對兩個誤差各選足夠小的界，就能讓總和小於 ε；例如令兩誤差都小於 $\varepsilon/(|L|+|M|+2)$。這一步解釋了為什麼不能不加條件地把會變大的因子當固定數。

商還要求 $M\neq 0$。先令 $|g-M|<|M|/2$，則 $|g|>|M|/2$，不會有零分母。再用：

> $\left|\frac{1}{g}-\frac{1}{M}\right|=\frac{|g-M|}{|g||M|}\le 2\frac{|g-M|}{|M|^2}$。

於是 $1/g\to 1/M$，與乘積規則合起來得到 $f/g\to L/M$。多項式可由常數、x 與有限次和、積組成，因此在任一點可直接代入；有理式直接代入則必須確認分母在該點非零。

同一組估計也適用於 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$，前提是共同論域在指定方向無界。把共同 δ 換成共同尾界。向右時取各門檻的最大值，向左時取各門檻的最小值，再於共同論域檢查所有合格 x。

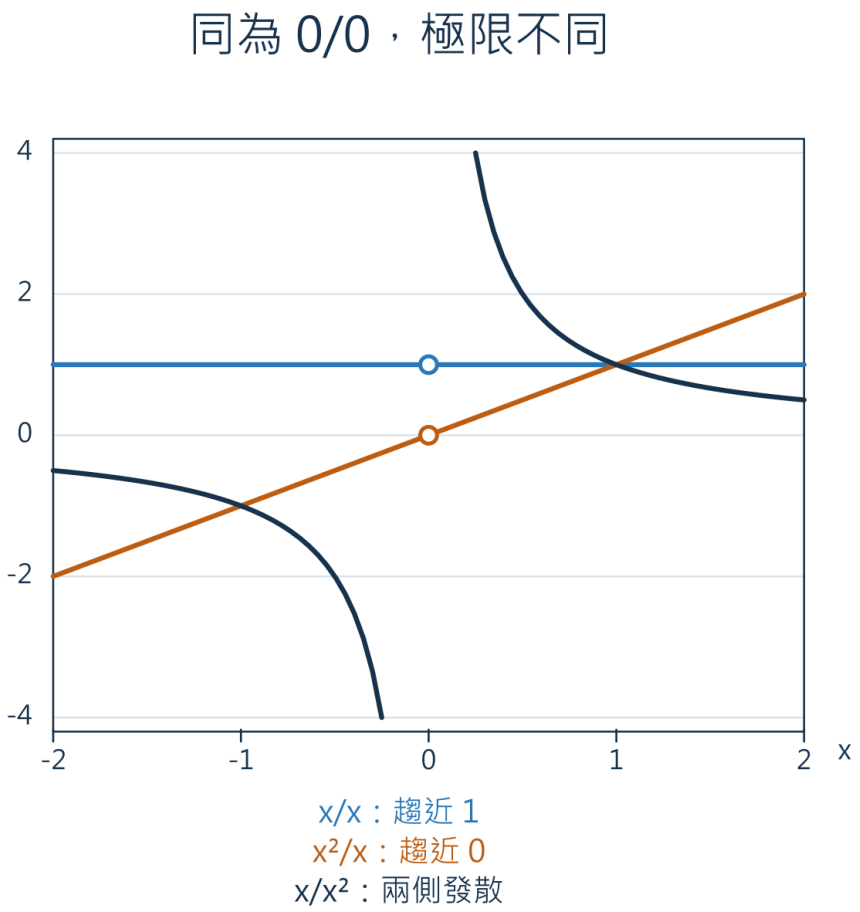


圖9 | 0/0 不是答案：同樣形式的商在中心附近可能接近1、接近0，或兩側發散。

5.2 四個例題

例題1 非零分母可直接使用商規則

求 $(2x^2+1)/(x-3)$ 在 $x\to 1$ 的極限。分子由多項式規則趨近3，分母趨近−2；−2非零，因此可相除，極限為−3/2。

例題2 根式差先有理化

求 $[\sqrt{(4+h)}-2]/h$ 在 $h\to 0$ 的極限。$h\neq 0$ 且 $4+h\geq 0$ 時，把分子與分母同乘非零的 $\sqrt{(4+h)}+2$，分子變為 h。約去 h 後得 $1/[\sqrt{(4+h)}+2]$。

根式趨近2可由 $|\sqrt{(4+h)}-2|=|h|/[\sqrt{(4+h)}+2]\leq|h|/2$ 看出。簡式分母趨近4且非零，故極限是1/4；原差商在 $h=0$ 仍未定義。

例題3 零比零必須再判斷

在 $x\neq0$ 的鄰域，$x/x=1$，$x^2/x=x$，$x/x^2=1/x$。前兩個極限分別是1和0；最後一個在右側任意大、左側任意負，無有限極限。三個原式直接代入都出現「0/0」，它只告訴我們商規則的分母條件不成立。

例題4 到無窮遠可換成小量

求 $x\to+\infty$ 時 $(3x^2-x+2)/(2x^2+1)$ 的極限。$x>0$ 時除分子分母以 x^2，得 $(3-1/x+2/x^2)/(2+1/x^2)$。給定 $\varepsilon>0$，$x>1/\varepsilon$ 使 $0<1/x<\varepsilon$；故新分子、分母趨近3、2。答案是3/2，而不是把 ∞ 當作可相除的實數。

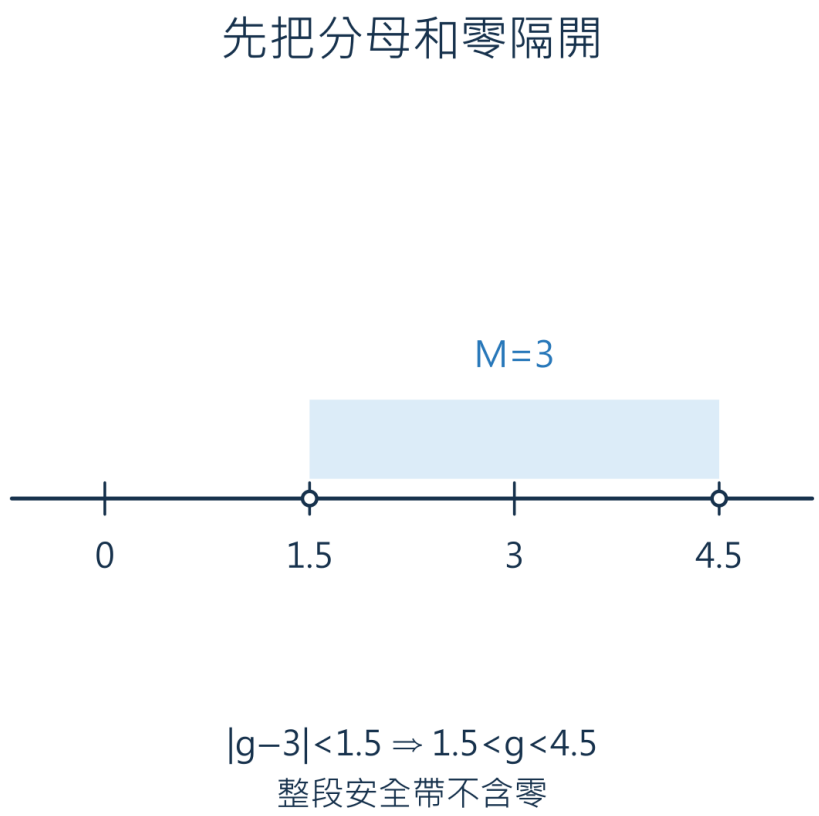


圖10 | 若分母趨近3，先把它限制在 1.5 與 4.5 之間，使取倒數不碰到零。

5.3 夾擠也可用於函數

若同一去心鄰域內 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，且上下界函數都趨近 L，取兩個誤差條件的共同 δ，就得到 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$。這裡不需要中間式本來就有極限。沒有共用論域、只在零星取樣點成立，或兩界趨向不同數時，都不能套這個結論。

5.4 練習

1 **B06-C05-Q01** 求 $(x+1)(x^2-1)$ 在 $x\to 2$ 的極限。

2 **B06-C05-Q02** 求 $(x-1)/(x^2+4)$ 在 $x\to 0$ 的極限。

3 **B06-C05-Q03** 求 $(x^2-1)/(x-1)$ 在 $x\to 1$ 的極限，說明可約分的條件。

4 **B06-C05-Q04** 求 $[\sqrt{(1+h)}-1]/h$ 在 $h\to 0$ 的極限。

5 **B06-C05-Q05** 求 $x/(x^2+1)$ 在 $x\to+\infty$ 的極限。

6 **B06-C05-Q06** 求 $(4x+3)/(2x-1)$ 在 $x\to-\infty$ 的極限。

7 **B06-C05-Q07** 用夾擠求 $x\sin(1/x)$ 在 $x\to 0$ 的極限。

8 **B06-C05-Q08** x^2/x^2 的分子與分母都趨近0，為何商仍有極限？

9 **B06-C05-Q09** $g(x)\to -4$ 時，如何保證近處 $|g(x)|>2$？求 $1/g(x)$ 的極限。

10 **B06-C05-Q10** $1/x-1/x$ 在 $x\to 0$ 有極限嗎？可否直接用兩個有限極限的差規則？

5.5 完整解答

Q01

兩因子都是多項式，代入2分別得3和3，乘積規則給極限9。

Q02

分子趨近−1，分母趨近4且非零，故商趨近−1/4。

Q03

只在 $x\neq 1$ 時可約去 $x-1$，得到 $x+1$；因此極限為2。原式在1無定義，並未因約分改變。

Q04

取 $h\neq 0$ 且足夠近0，乘分子分母以 $\sqrt{(1+h)}+1$，得 $1/[\sqrt{(1+h)}+1]$。根式與1的差之絕對值不超過 $|h|$；分母趨近2非零，故極限1/2。

Q05

在 $x>0$ 除以 x^2，得 $(1/x)/(1+1/x^2)$。分子趨近0，分母趨近1，商趨近0。

Q06

在 $x<0$ 且遠離0時除以 x，得 $(4+3/x)/(2-1/x)$。由 $|1/x|$ 可任意小，分子趨近4、分母趨近2，答案2。

Q07

$x\neq 0$ 時 $|x\sin(1/x)|\le|x|$；下界 $-|x|$、上界 $|x|$ 都趨近0，所以原式趨近0。不能先說 $\sin(1/x)$ 有極限。

Q08

$x\neq 0$ 時 $x^2\neq 0$，商恆等於1，所以極限1。直接商規則不適用，不等於極限不存在。

Q09

用 $\varepsilon=2$ 得近處 $|g(x)+4|<2$，由反三角不等式 $|g(x)|\geq 4-|g(x)+4|>2$。因極限 -4 非零，倒數趨近$-1/4$。

Q10

$x\neq 0$ 時兩項相減恆為0，所以極限0。個別的 $1/x$ 沒有有限雙側極限；這是先化簡原式，不是套有限極限的差規則。

第6章 連續與介值

6.1 連續把近處接回點值

f 在定義域內的 a 連續，意指對每個 ε>0，可找 δ>0，使 x∈D 且 |x−a|<δ 時 |f(x)−f(a)|<ε。因中心 x=a 的誤差本來就是0，在聚點可拆成三個檢查：點值存在、去心極限存在、二者相等。在端點按定義域一側判斷；孤立的定義域點相對連續，但不憑空取得去心極限。

多項式在全實數連續；有理式在分母不為零的點連續。這來自上一章的極限規則。接合兩段時，要在接縫核對兩側與點值，不能只因兩段各自的公式平滑便說整體連續。

6.2 四個例題

例題1 補洞的唯一連續點值

在 x≠2 定 f(x)=x+1，另令 f(2)=k。去心極限為3，故連續等價於 k=3。當 k=3 時三項條件都成立；k=4 時只是換了實心點的位置，極限仍不變。

例題2 接合兩條規則

左段 x≤1 取 x^2，右段 x>1 取 2x+k。f(1)=1，左極限1，右極限2+k。因此只有 2+k=1，也就是 k=−1，才能接成連續函數。這個計算目前只比高度，沒有用斜率代替連續性的檢查。

例題3 不解方程也能保證有根

取 $f(x)=x^3+x-1$。它在 [0,1] 連續，且 f(0)=−1、f(1)=1。介值定理保證存在 c∈(0,1) 使 f(c)=0。這是存在性，不是根的近似數值，也不是唯一性證明。

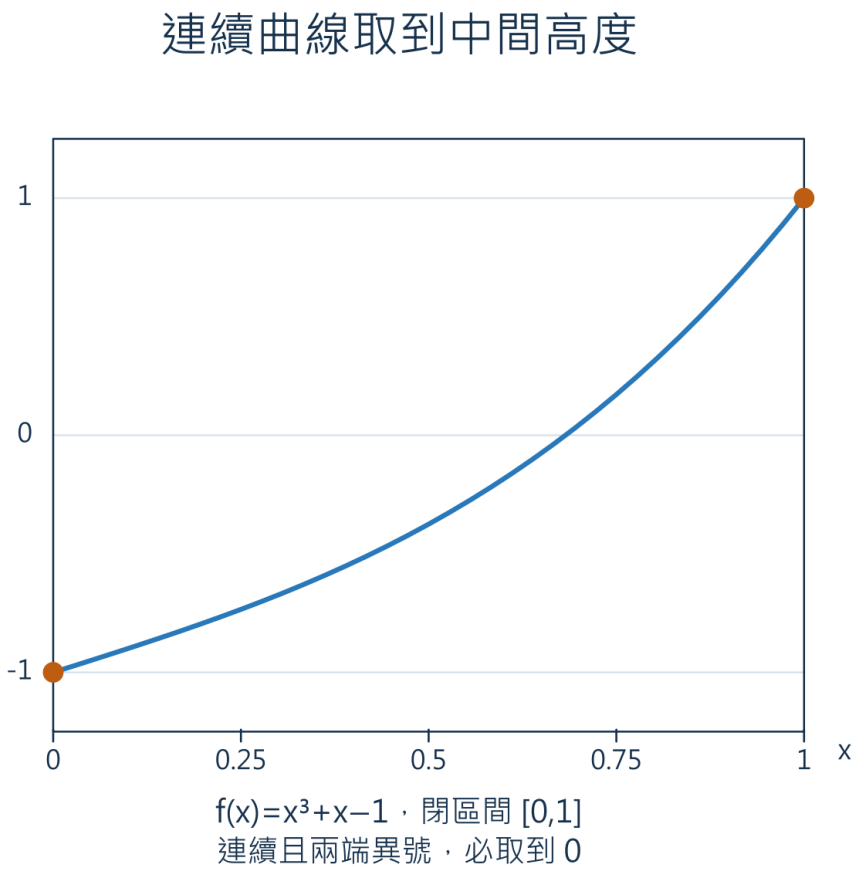


圖11｜連續的 x³+x−1 在兩端取異號，必穿過高度0；圖示不指定根的精確座標。

例題4 兩端異號但中間跳過零

在 [−1,1] 上令 f(x)=−1（x<0）、f(x)=1（x≥0）。兩端異號，卻沒有任何點取0，因為它在0跳躍。這不是介值定理的反例，而是漏掉連續前提時的反例。

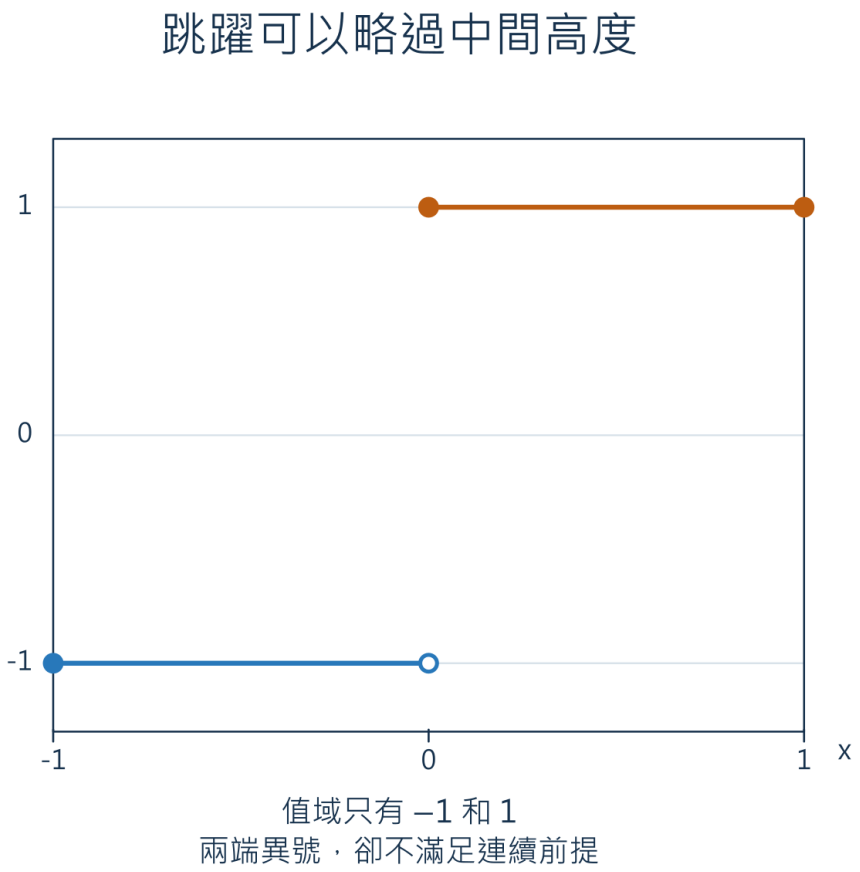


圖12 | 階梯函數左右分別取 −1 和 1，跳過高度0；端點異號無法代替區間連續。

6.3 介值定理為什麼成立

若 f 在閉區間 [a,b] 連續，介於 f(a)、f(b) 的任一實數 k，都等於某個 f(c)，c∈[a,b]。k 若等於端點值，該端點就可作 c。若嚴格介於兩端，可設 f(a)<k<f(b)；反向時對 −f 使用同樣論證。

令 S 是 [a,b] 中滿足 f(x)≤k 的點。S 含 a 且有上界，故上確界 c 存在。a 的連續性及 f(a)<k 保證 a 右方有點在 S；b 的連續性及 f(b)>k 排除 b 的一整段左鄰域，故 a<c<b。

若 f(c)<k，連續性給 c 右方仍有點在 S，違反上界。若 f(c)>k，則 c 的小鄰域內都大於 k；S 沒有點超過 c，也不能在 c 下方任意靠近 c，違反最小上界。兩種情況都不可能，因此 f(c)=k。

6.4 練習

1 **B06-C06-Q01** 判斷 $f(x)=x^2$ 在2是否連續，寫出極限與點值。

2 **B06-C06-Q02** 把 $(x^2-16)/(x-4)$ 在 $x=4$ 補成連續，應填什麼值？

3 **B06-C06-Q03** $x\le 0$ 取 $x+2$，$x>0$ 取 $3x+k$。求在0連續的 k。

4 **B06-C06-Q04** $x\neq 0$ 都取2，$f(0)=5$。在哪個點不連續？怎樣補正？

5 **B06-C06-Q05** $f(x)=\sqrt{(x-1)}$ 在定義域的端點1是否連續？

6 **B06-C06-Q06** 用介值定理證明 x^2-2 在 $(1,2)$ 有零點。

7 **B06-C06-Q07** 閉區間兩端皆為正，能否據此斷定無根？給一個有根例和一個無根例。

8 **B06-C06-Q08** x^3-x 在 $[-2,2]$ 上可用介值定理保證有根。能否說恰有一根？

9 **B06-C06-Q09** f 在 $[-1,2]$ 連續，$f(-1)=3$、$f(2)=7$。能保證取到5嗎？取到的位置有何範圍？

10 **B06-C06-Q10** $1/x$ 在 -1 與1異號，可否用介值定理推出零點？

6.5 完整解答

Q01

多項式極限可直接代入，故 $x\to 2$ 時 $x^2\to 4$，且 $f(2)=4$。極限等於點值，連續。

Q02

$x\neq 4$ 時原式等於 $x+4$，故去心極限8。定 $f(4)=8$，才使極限和點值相等。

Q03

左極限及點值皆為2，右極限是 k；因此且僅當 $k=2$ 時連續。

Q04

在0有極限2但點值5，所以不連續。其他點取足夠小鄰域不含0，函數恆為2。把 $f(0)$ 改為2便修補。

Q05

是。定義域 $[1,\infty)$，$f(1)=0$。若 $0\le x-1<\varepsilon^2$，則 $\sqrt{(x-1)}<\varepsilon$；這已檢查所有合格近處輸入。

Q06

多項式在 $[1,2]$ 連續，端點值 -1 與 2，0 嚴格介於其間。介值定理給 $c\in(1,2)$ 使 $c^2-2=0$。

Q07

不能。在 $[-1,1]$ 上，x^2 兩端皆為 1 且在 0 有根；常數 1 兩端也皆為 1 卻無根。端點同號只讓「異號保證」不能直接使用。

Q08

不能。$x^3-x=x(x-1)(x+1)$，所以 -1、0、1 都是區間內的零點。介值定理只保證至少一個。

Q09

5嚴格介於3與7，且函數整段連續，故至少有一個 $c\in(-1,2)$ 取到5。資訊不足以指定 c 的唯一位置。

Q10

不能，$1/x$ 在0未定義，不是在 $[-1,1]$ 上連續的函數。對所有合法 $x\neq0$，$1/x\neq0$，確實無根。

第7章 由平均變化到導數

7.1 差商的極限

在本冊，未特別加註的「在 a 可微」指 a 周圍有一個定義域的開區間，且下式的雙側極限是有限實數：

> $f'(a)=\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]/h$，差商只用 $h\neq 0$。

若存在，這個值是導數。把每個可微點送到它的導數，就得到新函數 f'；其定義域不一定與 f 相同。切線在此是經過 $(a,f(a))$、斜率 $f'(a)$ 的直線，方程 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$。

可微必連續：在去心鄰域，$f(a+h)-f(a)=h\cdot$差商。差商趨近有限值，乘上趨近0的 h 後，增量趨近0。反方向不成立，角點正好揭示兩個條件的差別。

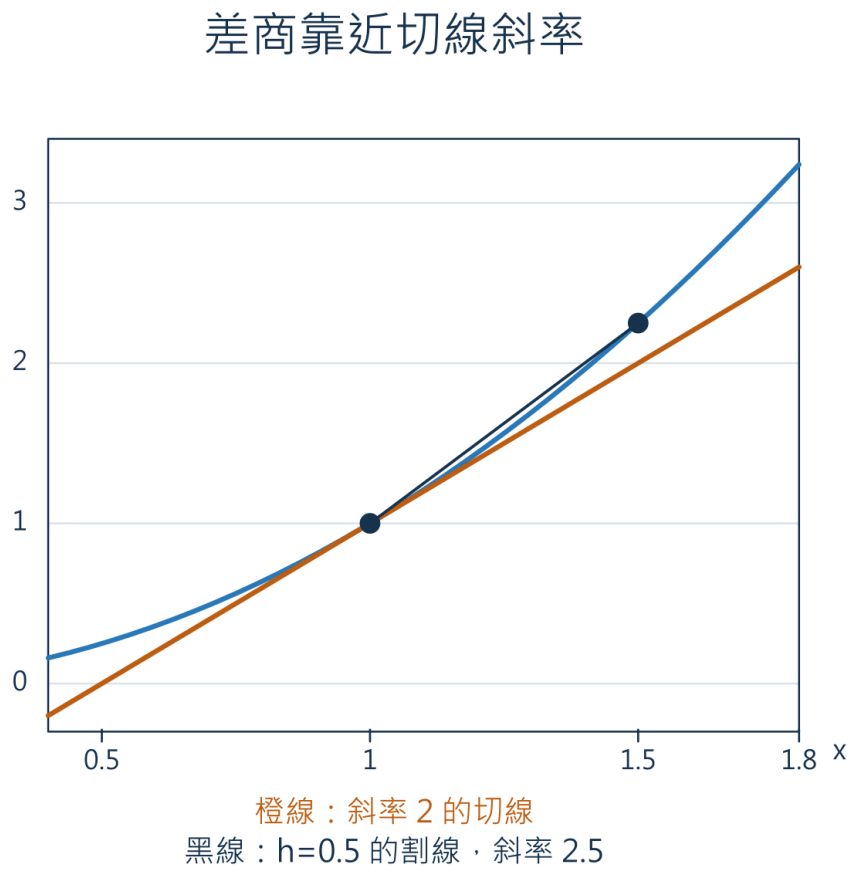


圖13 | 在平方曲線的 x=1 固定起點，割線斜率隨步長縮小而靠近切線斜率2。

7.2 四個例題

例題1 從定義推出平方函數的導數

對 $f(x)=x^2$，任取實數 a。$h\neq 0$ 時差商為 $[(a+h)^2-a^2]/h=2a+h$。令 $h\to 0$，得 $f'(a)=2a$。特別在 $a=1$，斜率2，切線 $y=1+2(x-1)=2x-1$。

這裡取極限的是去心簡式，不是把 $h=0$ 代入原差商。原式沒有 $h=0$ 的值，導數仍可存在。

例題2 速度是位置的導數

令 $s(t)=3t^2-2t$，單位公尺，$0\le t\le 5$。以 $t=2$ 為起點，差商為 $[3(2+h)^2-2(2+h)-(12-4)]/h=10+3h$。$h\to 0$ 時得瞬時速度10公尺 / 秒；$t=2$ 是內點，左右小步長都合法。

例題3 絕對值的角點

$f(x)=|x|$ 在0連續，因 $|f(x)-0|=|x|$。但差商 $|h|/h$ 的左極限為-1，右極限為1。兩者不相等，故 $f'(0)$ 不存在。圖上的兩段直線斜率不能取平均當作導數。

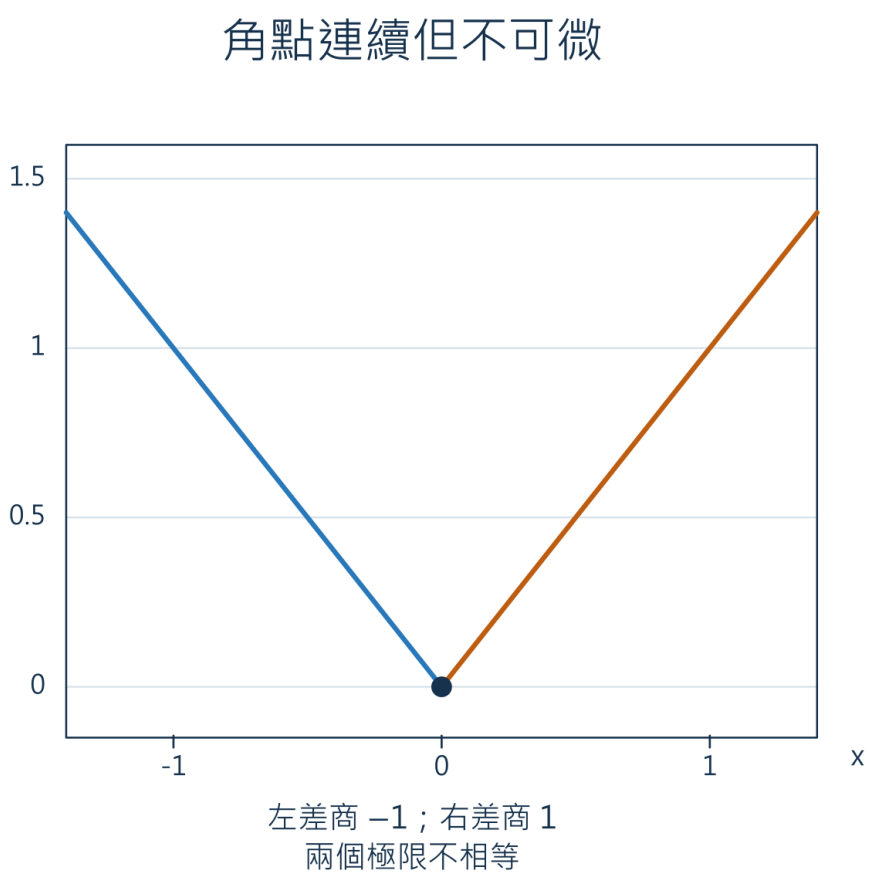


圖14｜絕對值在0的左斜率-1、右斜率1；連續的角點仍可能不可微。

例題4 根式在內點與端點不同

對 $\sqrt{x}$ 在 $a=4$，先用有理化把差商化為 $1/[\sqrt{(4+h)}+2]$，由第5章得導數$1/4$。若改在 $a=0$，定義域只給 $h>0$，右差商 $\sqrt{h}/h=1/\sqrt{h}$ 隨 $h\to 0^{+}$ 無上界，因此連有限的右導數也不存在。兩個位置不能用同一個內點公式代入。

7.3 練習

1 **B06-C07-Q01** 用差商求常數函數 $f(x)=5$ 的導數。

2 **B06-C07-Q02** 求 $f(x)=x^{2}$ 在 $a=2$ 的導數及切線方程。

3 **B06-C07-Q03** 用差商求 $f(x)=3x-7$ 在任意 a 的導數。

4 **B06-C07-Q04** 用差商求 x^{3} 在 $x=1$ 的導數。

5 **B06-C07-Q05** $f(x)=|x-2|$ 在2是否可微？比較兩側。

6 **B06-C07-Q06** 左段 $x<0$ 為 x^{2}，右段 $x\ge 0$ 為$2x$。判斷0的連續與可微。

7 **B06-C07-Q07** $x\neq 0$ 時 $f(x)=0$，$f(0)=1$。能否在0可微？不用先算左右導數。

8 **B06-C07-Q08** $s(t)=t^{2}-3t$ 公尺，$0\le t\le 5$，求 $t=3$ 的瞬時速度。

9 **B06-C07-Q09** 求 $\sqrt{x}$ 在0的右差商，說明是否有有限右導數。

10 **B06-C07-Q10** x^{2} 在 $a=1$ 取 $h=0.01$，算差商並與導數比較。

7.4 完整解答

Q01

對任意 a 與 $h\neq 0$，分子為$5-5=0$，商恆為0，故導數0。

Q02

由平方差商 $2a+h$ 得 $f'(2)=4$，且 $f(2)=4$。切線 $y=4+4(x-2)=4x-4$。

Q03

分子為 $3(a+h)-7-(3a-7)=3h$；$h\neq 0$ 時差商恆3，所以任意 a 的導數都是3。

Q04

$(1+h)^3-1=3h+3h^2+h^3$。除以非零 h 得 $3+3h+h^2$，$h\to 0$ 時趨近3。

Q05

以2為起點，差商為 |h|/h。左側−1、右側1，沒有相同有限極限，故不可微。

Q06

兩側高度極限與點值皆為0，所以連續。左差商 $h^2/h=h\to 0$；右差商 $2h/h=2$。斜率不接合，故不可微。

Q07

去心極限0不等於點值1，故不連續。由「可微必連續」的逆否，不能在0可微。

Q08

差商 $[s(3+h)-s(3)]/h=3+h$，因為分子為 $3h+h^2$。令 $h\to0$，得3公尺 / 秒。

Q09

$h>0$ 時右差商為$1/\sqrt{h}$。任給 $M>0$，$0<h<1/M^2$ 即使差商大於 M，故沒有有限右導數。

Q10

差商為$2+h=2.01$，導數為2。相差0.01；小步長使數值接近，沒有把割線變成同一條切線。

第8章 微分規則

8.1 從差商而不是背口訣開始

若 f、g 都在 a 可微，和的差商就是兩個差商相加，故 (f+g)′(a)=f′(a)+g′(a)；常數倍同理。正整數冪可從差商取得。對整數 m≥2 且 x≠a，因式分解得 (x^m−a^m)/(x−a) 等於 m 個乘積項之和，每一項在 x→a 時趨近 a^(m−1)，故導數是 m a^(m−1)。m=1 直接由 x 的差商得1。零次多項式項直接寫成常數1，導數為0。若原式 x^0 沿用第一冊非零底數的約定，這個常數簡式及其導數都只用於原定義域 x≠0。

乘積的分子可插入並減去 f(a+h)g(a)：

> f(a+h)g(a+h)−f(a)g(a)=f(a+h)[g(a+h)−g(a)]+g(a)[f(a+h)−f(a)]。

除以 h≠0 並取極限，由可微必連續使 f(a+h)→f(a)，所以 (fg)′=f′g+fg′，各量在同一點取值。一般不是 f′g′。

若 g(a)≠0，可微又使 g 在 a 附近連續，故近處保持非零。倒數的差商為 −[g(a+h)−g(a)]/[h·g(a+h)g(a)]，極限是 −g′(a)/g(a)²。與乘積規則合併得：

> (f/g)′=(f′g−fg′)/g²，限在原商有定義且兩函數可微的點。

8.2 鏈鎖律不必除以可能為零的增量

令 F=f∘g，u=g(a)，Δg=g(a+h)−g(a)。假設 g 在 a 可微，f 在 u 可微；兩點附近的規則有合法論域。把外層差商記為 R(v)=[f(u+v)−f(u)]/v（v≠0），並定 R(0)=f′(u)。按導數定義，R 在0連續。

對小的 h≠0，F 的差商恆等於 R(Δg)·Δg/h。Δg≠0 時是代數約分；Δg=0 時兩邊同為0，沒有除以零。因 Δg→0、Δg/h→g′(a)，得到 F′(a)=f′(g(a))g′(a)。

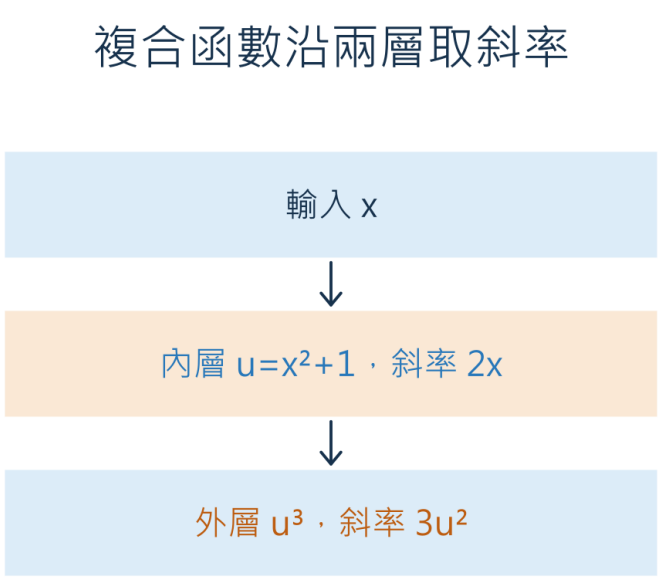


圖15 | 先求內層 x^2+1 的局部變化，再乘外層 u^3 在 $u=x^2+1$ 的斜率。

8.3 四個例題

例題1 展開與乘積規則互核

$f(x)=(x^2+1)(x-2)$。乘積規則給 $2x(x-2)+(x^2+1)=3x^2-4x+1$。也可先展開 x^3-2x^2+x-2 再逐項微分，所得相同。兩條路核對同一個導數，而不是改變函數。

例題2 商的分子次序

$f(x)=(x^2+1)/(x-1)$，$x\neq1$。分子導數$2x$，分母導數1，故 $f'(x)=[2x(x-1)-(x^2+1)]/(x-1)^2=(x^2-2x-1)/(x-1)^2$。在 $x=0$ 值為-1；$x=1$ 不在原定義域。

例題3 外層在內層的值上取斜率

$f(x)=(x^2+1)^3$。令 $u=x^2+1$，則 $d(u^3)/du=3u^2$，$du/dx=2x$。因此 $f'(x)=3(x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2$。$x=1$ 時得24。只寫 $3(x^2+1)^2$ 會漏掉內層速度。

例題4 先化簡也要帶著孔洞

$(x^2-1)/(x-1)$ 在 $x\neq 1$ 等於 $x+1$。每個 $x\neq 1$ 都有不碰到1的小開區間，所以導數在這些點等於1。在 $x=1$ 原函數沒有值，不能說原函數在1有導數；補成連續延拓才是另一個函數。

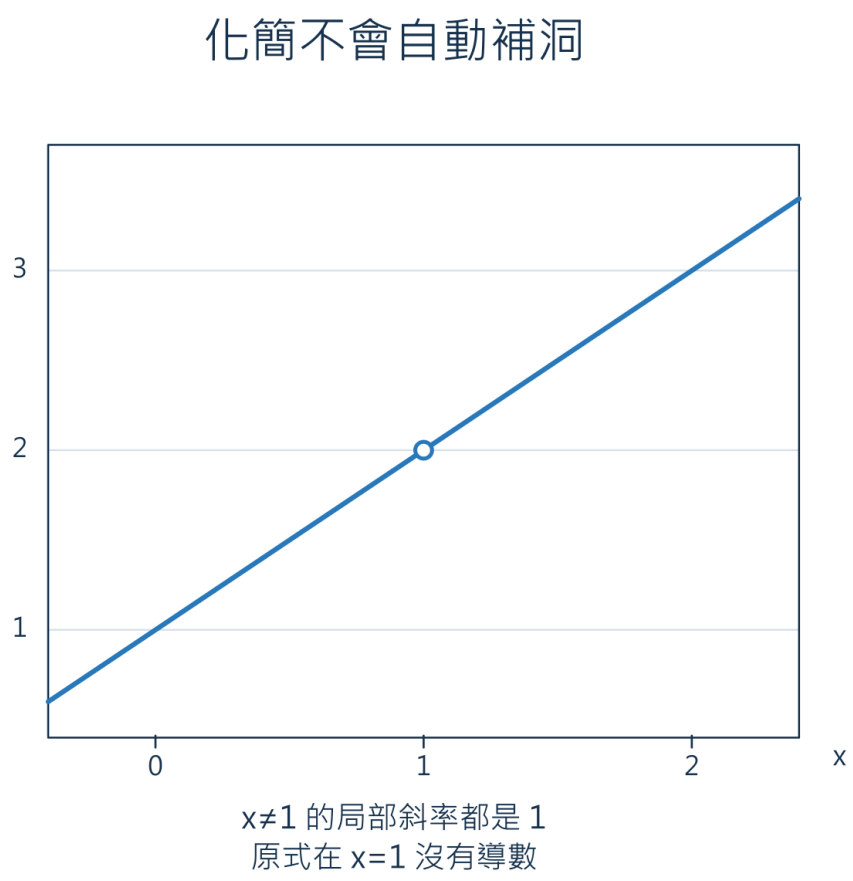


圖16 | 原商的圖在 $x=1$ 留孔；其他點局部等於直線，因此可微，孔洞本身不在論域。

8.4 練習

1 **B06-C08-Q01** 求 $5x^3-2x+4$ 的導數。

2 **B06-C08-Q02** 用乘積規則求 $x(x^2+1)$ 的導數，再展開核對。

3 **B06-C08-Q03** 求 $(x+1)/(x+2)$ 的導數，保留定義域。

4 **B06-C08-Q04** 求 $(2x-3)^5$ 的導數。

5 **B06-C08-Q05** 求 $(x^2-4)^2$ 的導數。

6 **B06-C08-Q06** $g(x)$ 恆為2，f 在2可微。求 $f\circ g$ 的導數，並說明內層增量為何不妨礙。

7 **B06-C08-Q07** 求 $(x^2-4)/(x-2)$ 的導數。能否給原函數在2的導數？

8 **B06-C08-Q08** 用倒數規則求 $1/x^2$ 的導數。

9 **B06-C08-Q09** 已知 $f(a)=2$、$f'(a)=3$、$g(a)=-1$、$g'(a)=4$，求 $(fg)'(a)$。

10 **B06-C08-Q10** $f(x)=x^2$、$g(x)=x+1$，分別求 $f\circ g$ 與 $g\circ f$ 的導數。

8.5 完整解答

Q01

逐項微分：$5x^3$ 給$15x^2$，$-2x$ 給-2，常數4給0，所以結果是$15x^2-2$。

Q02

導數為 $1\cdot(x^2+1)+x\cdot 2x=3x^2+1$。展開原式成 x^3+x，逐項微分仍為$3x^2+1$。

Q03

$(x+2)-(x+1)=1$，故導數為 $1/(x+2)^2$，僅在 $x\neq -2$ 有效。不能因分子簡單而忽略分母限制。

Q04

外層斜率5(2x−3)^4，內層斜率2，相乘得10(2x−3)^4。

Q05

由外平方、內層 x^2-4，得 $2(x^2-4)\cdot 2x=4x(x^2-4)$。在 $x=\pm 2$ 結果為0，原函數在兩點有定義。

Q06

$F(x)=f(2)$ 恆為常數，故 $F'=0$。鏈鎖律也給 $f'(2)\cdot 0=0$；增量為0時整個複合差商已是0，不必除以 Δg。

Q07

只在 $x\neq 2$ 時等於 $x+2$，所以這些點導數1。原式在2未定義，沒有原函數的導數。

Q08

令 $g=x^2$；$x\neq 0$ 時 $-g'/g^2=-2x/x^4=-2/x^3$。原點仍排除。

Q09

$f'(a)g(a)+f(a)g'(a)=3\cdot(-1)+2\cdot 4=5$。這是兩個加項，不是兩導數的乘積。

Q10

$(f\circ g)(x)=(x+1)^2$，導數$2(x+1)$；$(g\circ f)(x)=x^2+1$，導數$2x$。合成順序不同，規則與斜率一般也不同。

第9章 常見函數的導數

9.1 先分清冪的論域

正整數冪的導數由第8章得到。負整數冪是倒數：例如 $x^{-3}=1/x^3$，只在 $x\neq0$ 有定義，導數為 $-3/x^4$。一般實數次方在 $x>0$ 可定義成 $\exp(r\ln x)$，所以不能不看底數就把同一公式搬到負半軸。奇次實根另有自己的實數定義。

9.2 指數的斜率從小增量而來

這裡用 $E(x)=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$ 建立自然指數，$k!$ 是1乘到 k 的乘積。對固定 x，從 $k\geq1$ 起，下一個絕對項等於本項乘 $|x|/(k+1)$。當 $k+1\geq2|x|$，這個乘數不超過 $1/2$，故尾段可由幾何級數控制，絕對值部分和單調有界。將正項、負項各自求和，原級數就有有限值。

為了取得 $E(x+y)$，將 $E(x)E(y)$ 的項按兩個下標和分組。這一步合法：未收進三角部分和的項至少有一個下標大於截斷階數的一半，絕對和由一邊的絕對尾和乘另一邊的絕對全和控制，趨近零。和為 k 的組用二項式定理化成 $(x+y)^k/k!$，因此 $E(x+y)=E(x)E(y)$。

當 $0<|h|\leq1/2$，由 $k!\geq1$，從二次起的絕對尾和不超過 $|h|^2/(1-|h|)\leq2|h|^2$。因此：

> $|[E(h)-1]/h-1|\leq2|h|$，所以 $E'(x)=E(x)\lim_{h\to0}[E(h)-1]/h=E(x)$。

$E(0)=1$、$E(x)E(-x)=1$，且 $E(x)=E(x/2)^2$，故 $E(x)>0$。$h>0$ 時級數給 $E(h)>1$，所以 E 嚴格增加。令 $e=E(1)$。對整數 m 及正整數 n，加法與倒數法則給 $E(m/n)^n=E(m)=e^m$。因 $E(m/n)>0$，所以它是 e^m 的正 n 次根。每個實數都能用有理數列逼近，連續性唯一決定延拓的值，本冊記為 e^x。

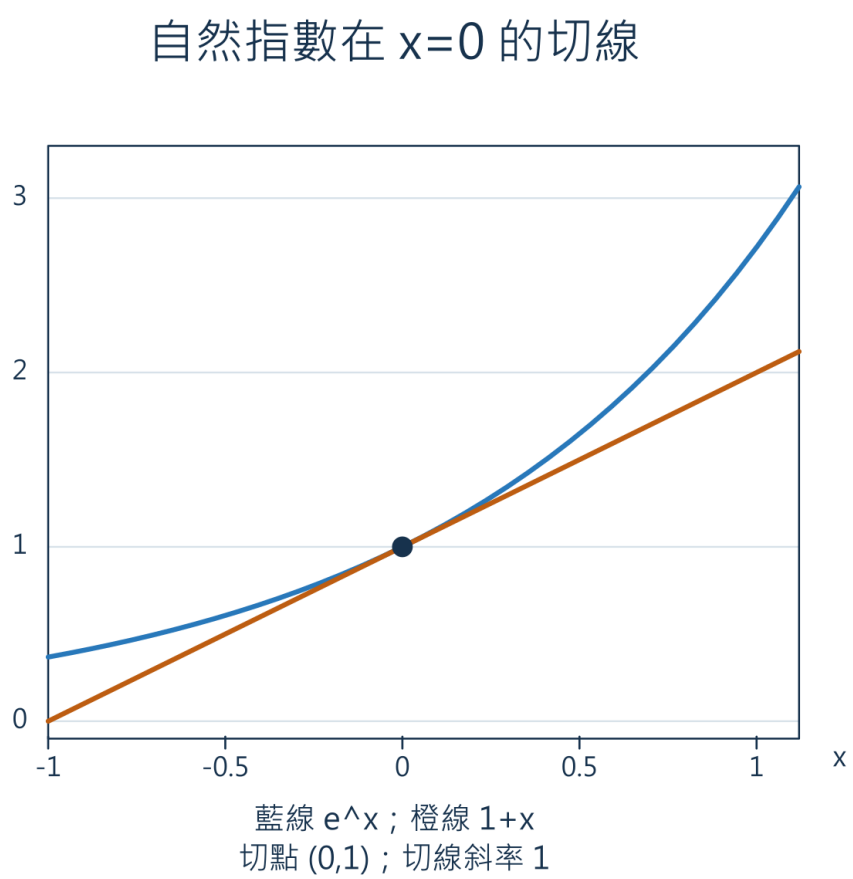


圖17 | 自然指數通過 (0,1)，該點導數也為1，切線 y=1+x 只作局部近似。

9.3 對數與一般正底數

E(x) 在 x≥0 至少是1+x，向右無界；E(−x)=1/E(x)，故向左趨近0。嚴格增加、連續與介值定理保證 E 把 ℝ 一一對應到 (0,∞)。反函數是 ln。

固定 x>0，令 v=ln(x+t)−ln x，其中 |t| 夠小使 x+t>0。v→0：對任意 η>0，E(ln x−η)<x<E(ln x+η)，當 t 夠小，x+t 仍介於兩界，反推 |v|<η。又 t=x[E(v)−1]，而 t≠0 時 v≠0，故 v/t→1/x。這證明 (ln x)′=1/x，不必先假設反函數可微。

對 a>0，a^x=E(x ln a)，所以 (a^x)′=a^x ln a。對固定實數 r 與 x>0，x^r=E(r ln x)，故導數 r x^r/x=r x^(r−1)。

9.4 三角微分用弧度

在單位圓，對 0<h<π/2，內三角形、扇形、外三角形的面積依序為 (sin h)/2、h/2、(tan h)/2。由包含關係得 sin h≤h≤tan h，故 cos h≤sin h/h≤1；負 h 利用奇偶性得到同樣夾擠。這裡 h 是弧度，不是角度數。

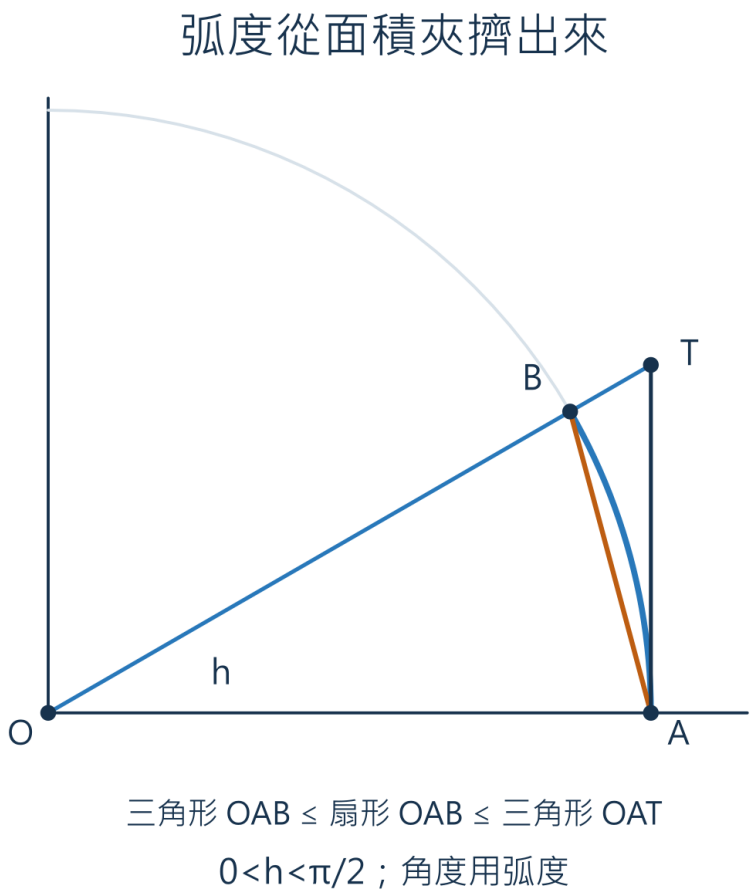


圖18 | 單位圓上的內三角形、扇形與切線外三角形，給出 sin h≤h≤tan h 的面積比較。

近0時 cos h>0，且 0≤1−cos h=sin²h/(1+cos h)≤h²，因此 cos h→1、(cos h−1)/h→0，而 sin h/h→1。展開 sin(x+h)=sin x cos h+cos x sin h；差商極限給 (sin x)′=cos x。同樣展開 cos(x+h)=cos x cos h−sin x sin h，得 (cos x)′=−sin x。再用商規則，(tan x)′=1/cos²x，限 cos x≠0。

9.5 四個例題

例題1 負整數冪與實數冪

對 x≠0，(1/x³)′=−3x²/x⁶=−3/x⁴。對 x>0，(x^(3/2))′=(3/2)x^(1/2)=(3/2)√x。兩個答案的論域來源不同，不能合併成不看 x 的口訣。

例題2 指數內層有自己的斜率

f(x)=e^(2x)，外層 E 的導數等於自己，內層2x導數2，故 f′(x)=2e^(2x)。x=0 時 E(0)=1，斜率2。

例題3 對數檢查真數

f(x)=ln(x²+1)。因 x²+1≥1，所有實數 x 都合法。用外層 1/u 與內層2x，得到 f′(x)=2x/(x²+1)。

例題4 三角合成須乘內層

f(x)=sin(3x)，內層3x以弧度解讀，導數是3。因此 f′(x)=3cos(3x)，在0的斜率為3，而非1。

9.6 練習

1 **B06-C09-Q01** 求 $x^5 - 3/x$ 的導數與論域。

2 **B06-C09-Q02** 在 $x>0$ 用實數冪公式求 $\sqrt{x}$ 的導數。

3 **B06-C09-Q03** 求 $e^{(-x)}$ 的導數。

4 **B06-C09-Q04** 求 $\ln(3x-1)$ 的導數，先列合法 x。

5 **B06-C09-Q05** 求 2^x 的導數。

6 **B06-C09-Q06** 求 $\cos(2x)$ 的導數。

7 **B06-C09-Q07** 求 $\sin x \cdot \cos x$ 的導數。

8 **B06-C09-Q08** 求 $\tan x$ 在0的導數，說明為何可用商規則。

9 **B06-C09-Q09** 實立方根 $f(x)$ 在全實數定義。它在0有有限導數嗎？

10 **B06-C09-Q10** 求 $\ln(x^2)$ 的導數。是否能在全論域寫成$2\ln x$？

9.7 完整解答

Q01

$x\neq 0$。x^5 給$5x^4$，$-3x^{-1}$ 給$3x^{-2}$，所以 $f'(x)=5x^4+3/x^2$。$x=0$ 不補進來。

Q02

對 x>0，√x=x^(1/2)，導數為 (1/2)x^(−1/2)=1/(2√x)。這個內點公式不能在0代入。

Q03

E 的導數是 E，內層 −x 的導數 −1，故結果 −e^(−x)。

Q04

3x−1>0 即 x>1/3。鏈鎖律給 3/(3x−1)，分母在合法論域上為正。

Q05

$2^x = E(x \ln 2)$。內層導數 $\ln 2$，因此結果 $2^x \ln 2$。

Q06

外層餘弦導數 $-\sin$，內層導數2，得 $-2\sin(2x)$。負號來自外層，不因合成而消失。

Q07

用乘積規則得 $\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$。

Q08

cos 0=1，近0不為零。由 (tan x)′=1/cos²x，得到 tan′(0)=1。

Q09

令 r 為 h 的實立方根，則 h=r³。h≠0 時差商 r/h=1/r²；h→0 時 r→0，故差商向正無窮增大，沒有有限導數。

Q10

真數 x²>0，所以 x≠0。導數為 2x/x²=2/x。正確對數改寫是2 ln|x|；負 x 時 ln x 在實數中無定義。

第10章 單調性與中值定理

10.1 閉區間讓極值可達

連續函數在有限閉區間 [a,b] 有最大值與最小值。理由可追到實數完備性：區間內任一數列，可反覆二分並保留有無窮多項落入的閉半段。巢狀區間長度趨近零，取左端點的上確界得到共同點；選取下標依序增大的項，便有收斂到該點的子列。共同點仍在 [a,b]。

若 f 無上界，可挑 $f(x_n)>n$，取 x_n 的收斂子列後，連續性卻要求函數值趨近有限點值，矛盾。故上確界 S 有限；再選 $f(x_n)>S-1/n$，用同樣的子列與連續性，得到某點的值正好是 S。對 −f 使用此論證得到最小值。這解釋了為什麼只在開區間有界不夠保證取到極值。

10.2 由內點極值到中值定理

若 f 在內點 c 可微且 c 是局部最大點，則小增量的分子 $f(c+h)-f(c)\le 0$。右差商非正，左差商非負；若兩者收斂到同一值，只能是0。局部最小同理。這是必要條件；導數為0不保證極值。

羅爾定理要求 f 在 [a,b] 連續、在 (a,b) 可微、$a<b$，且 $f(a)=f(b)$。若函數常數，任一內點斜率0；若不常數，至少有一個極值嚴格異於端點值，因而在內點取得。由上段得某 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=0$。

微分中值定理要求 $a<b$，f 在 [a,b] 連續且在 (a,b) 可微。端點可以取不同函數值。令 $m=[f(b)-f(a)]/(b-a)$，減去割線：$g(x)=f(x)-f(a)-m(x-a)$。g 連續、可微且兩端皆0，由羅爾定理得到 $g'(c)=0$，即 $f'(c)=m$。它不要求端點可微，也不保證 c 唯一。

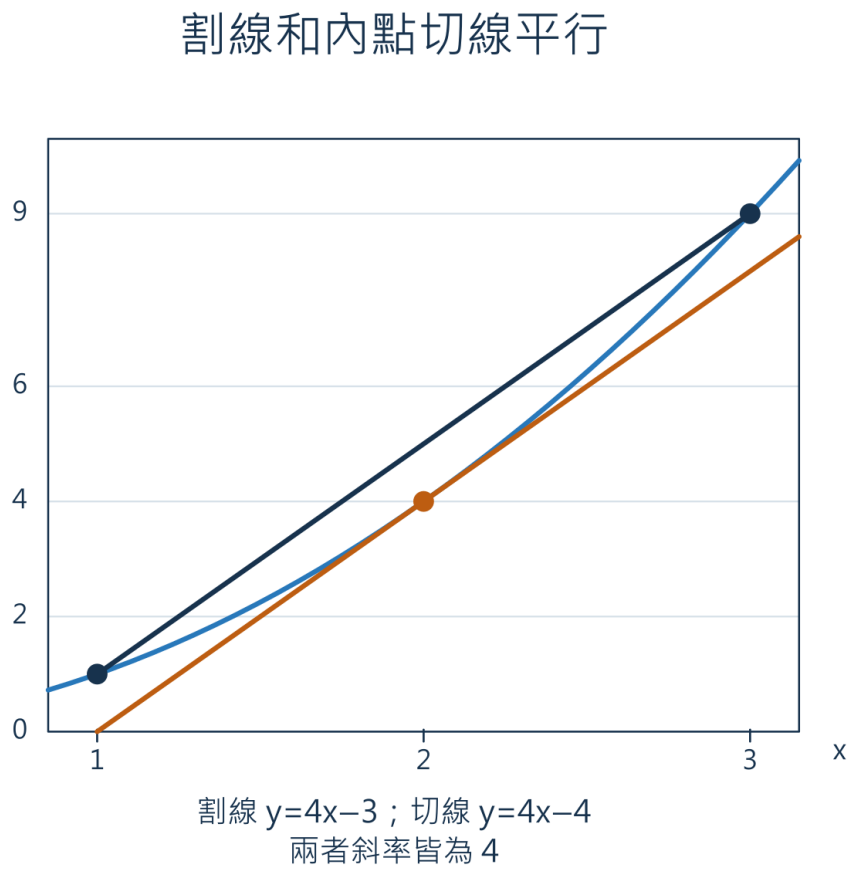


圖19｜平方函數從1到3的端點割線斜率4，內點 c=2 的切線與它平行。

10.3 四個例題

例題1 找到與割線平行的切線

$f(x)=x^2$ 在 [1,3] 滿足中值定理。割線斜率 $(9-1)/(3-1)=4$，解 $2c=4$ 得 $c=2$，確在開區間。割線 $y=4x-3$，切線 $y=4x-4$；平行不代表重合。

例題2 用導數符號判單調區間

$f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3(x-1)(x+1)$。在 $x<-1$ 或 $x>1$ 為正，在 $-1<x<1$ 為負。在 $[-2,-1]$ 或 $[1,2]$ 各取兩點，用中值定理得後值大於前值；在 $[-1,1]$ 同理得嚴格減少。端點可以納入比較，因中值點在兩選點之間，不必讓端點斜率非零。

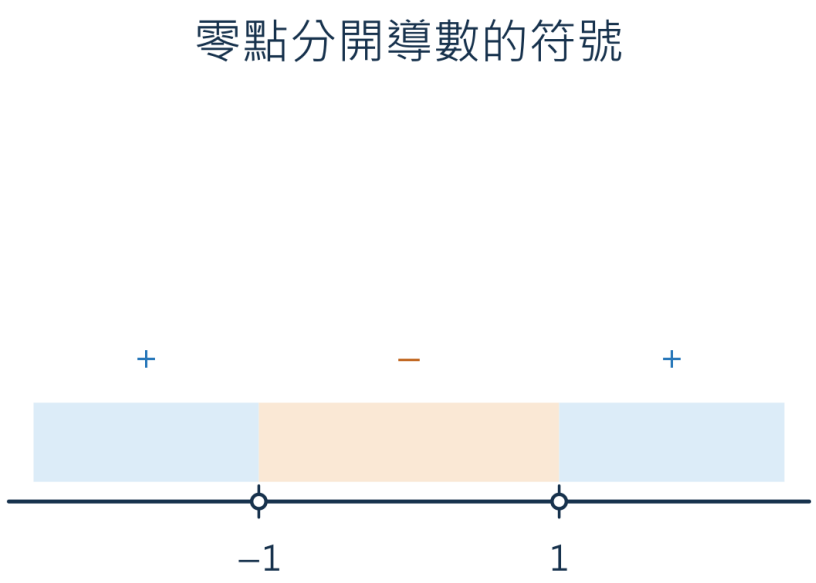


圖20 | 由 f′(x)=3(x−1)(x+1) 的零點分出正、負、正三段；每段分開判單調。

例題3 有平均斜率卻找不到中值點

f(x)=|x| 在 [−1,1] 連續，端點同值1，平均斜率0。兩側導數是−1和1，0點不可微，沒有 c 使 f′(c)=0。這不違反定理，因開區間可微的條件已經失敗。

例題4 不知道中值點也能估變化量

若 f 在 [2,2.2] 連續、內部可微，且 |f′(x)|≤3，則某內點 c 使 f(2.2)−f(2)=0.2 f′(c)。取絕對值得變化量不超過0.6。估界只要控制整段斜率，不必解出 c。

10.4 練習

1 **B06-C10-Q01** 對 x^2 在 $[0,4]$，求平均斜率與中值點。

2 **B06-C10-Q02** 對 x^3 在 $[-1,1]$，找所有符合中值定理等式的 c。

3 **B06-C10-Q03** 對 x^2-4x 在 $[0,4]$，用羅爾定理並找 c。

4 **B06-C10-Q04** 若 f 在一個開區間上可微且 f' 恆為0，證明 f 為常數。

5 **B06-C10-Q05** x^3 在0的導數是0。是否仍可嚴格遞增？給出理由。

6 **B06-C10-Q06** $x<0$ 取 x，$x>0$ 取 $x-10$。導數都為正，能否說在整個定義域嚴格增加？

7 **B06-C10-Q07** 在 $0<x<1$ 取 $f(x)=x$，且 $f(0)=f(1)=0$。羅爾定理的哪個條件失敗？

8 **B06-C10-Q08** f 在長度3的閉區間連續、內部可微，$|f'|\le 0.4$。兩端值的差之絕對值至多多少？

9 **B06-C10-Q09** f 在開區間可微且 $f'\ge 0$，可推出不減嗎？可推出嚴格增加嗎？

10 **B06-C10-Q10** $f(x)=2x-x^2$ 在 $[0,2]$。判斷單調區間，並找端點割線的中值點。

10.5 完整解答

Q01

平均斜率 $(16-0)/4=4$。函數連續且可微，解 $f'(c)=2c=4$ 得 $c=2$，在 $(0,4)$。

Q02

平均斜率 $[1-(-1)]/2=1$。解 $3c^2=1$ 得 $c=\pm 1/\sqrt{3}$，兩個都在 $(-1,1)$。定理只保證存在，這題有兩個。

Q03

多項式符合連續與可微，兩端均為0。由羅爾定理有 $f'(c)=0$，解 $2c-4=0$ 得 $c=2$。

Q04

任取區間內 $x<y$，限制到 $[x,y]$ 滿足中值定理。$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)=0$，故任兩點值相同。

Q05

可以。任 $a<b$，$b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$。後因子等於 $(b+a/2)^2+3a^2/4$，除 $a=b=0$ 外皆正；$a<b$ 排除該情形，故差為正。

Q06

不能。取 $-1<1$，$f(-1)=-1$ 但 $f(1)=-9$。兩點間跨過缺失的0，不能在整段 $[-1,1]$ 使用中值定理。

Q07

f 在1不連續：左極限1，點值0。雖端點同高、內部導數皆為1，閉區間連續失敗，所以無法推出某處斜率0。

Q08

中值定理給端點差等於3乘某內點導數。取絕對值，至多3·0.4=1.2。

Q09

任 x<y，中值定理給 f(y)−f(x)=(y−x)f′(c)≥0，所以不減。常數函數也滿足 f′≥0，嚴格增加不能保證。

Q10

f′(x)=2−2x，故在 [0,1] 嚴格增加、[1,2] 嚴格減少。兩端 f=0，平均斜率0；f′(c)=0 得 c=1。

第11章 極值與近似

11.1 最大最小要比較候選值

局部極大是在定義域某小鄰域內不小於附近值；絕對最大則要與整個指定集合比較。連續函數在閉區間必達最大最小。找候選時，列兩端、內部導數為零的點，以及內部有值但不可微的點；若候選有限，代回原函數比較值。導數為零只給候選，不負責決定是最大還是最小。

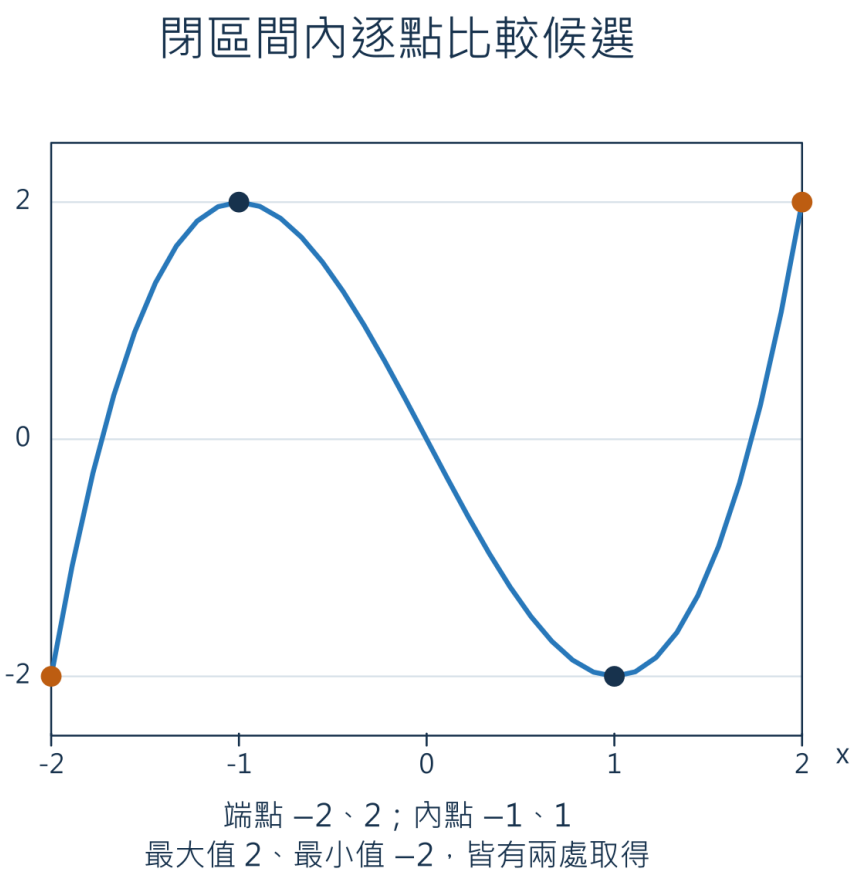


圖21 | 在 x^3-3x 的閉區間上，端點與兩個內部駐點都是候選；相同極值可在不同位置取得。

11.2 局部線性式與誤差

若 f 在 a 可微，令 $L(a+h)=f(a)+f'(a)h$。誤差 $R(h)=f(a+h)-L(a+h)$ 滿足 $R(h)/h\to 0$，這是把差商減去 $f'(a)$ 後直接得到。這只保證相對於 $|h|$ 的誤差變小，不代表每個步長都已達指定精度。

設 J 是以 a 與 a+h 為端點的閉區間。若 f' 在包含 J 的開區間可微，且在 J 上有 $|f''|\le M$，就可估計誤差。$h=0$ 時 $R(0)=0$。$h\neq 0$ 時，對 J 內任一 $t\neq a$，在 a 與 t 之間對 f' 用中值定理，得 $|f'(t)-f'(a)|\le M|t-a|$。$t=a$ 時同一不等式兩側皆為0。

在 J 上對 $f-L$ 用中值定理，得 $R(h)=h[f'(c)-f'(a)]$，其中 c 介於 a 與 a+h。由 $|c-a|\le|h|$ 得 $|R(h)|\le M|h|^2$。這是兩次中值定理給出的保守上界。

11.3 四個例題

例題1 極值可能同時在端點與內點取得

在 $[-2,2]$ 取 $f(x)=x^3-3x$。$f'=3(x^2-1)$，內點候選 -1、1，加兩端 -2、2。依序代入 -2、-1、1、2，函數值是 -2、2、-2、2。因此最大值2在 -1 與2 取得，最小值 -2在 -2 與1 取得。

例題2 不可微的點不能漏掉

$f(x)=|x-1|$ 在 $[0,3]$ 連續。兩側導數為-1、1，不會為零；$x=1$ 不可微，仍是內點候選。比較 $f(0)=1$、$f(1)=0$、$f(3)=2$，得最小值0在1，最大值2在3。

例題3 根式的線性近似有方向與界

以 $a=1$ 近似 $\sqrt{1+h}$，線性式是$1+h/2$。令 $r=\sqrt{1+h}$，$h\ge -1$，利用 $r-1=h/(r+1)$ 得：

$$r-(1+h/2)=-h^2/[2(r+1)^2]。$$

所以線性式不小於真值，且在 $|h|\le 1/2$ 時誤差大小至多 $h^2/2$。$h=0.04$ 時 $\sqrt{1.04}$ 約為1.02，誤差不超過0.0008；可寫 $1.0192\le\sqrt{1.04}\le 1.02$。

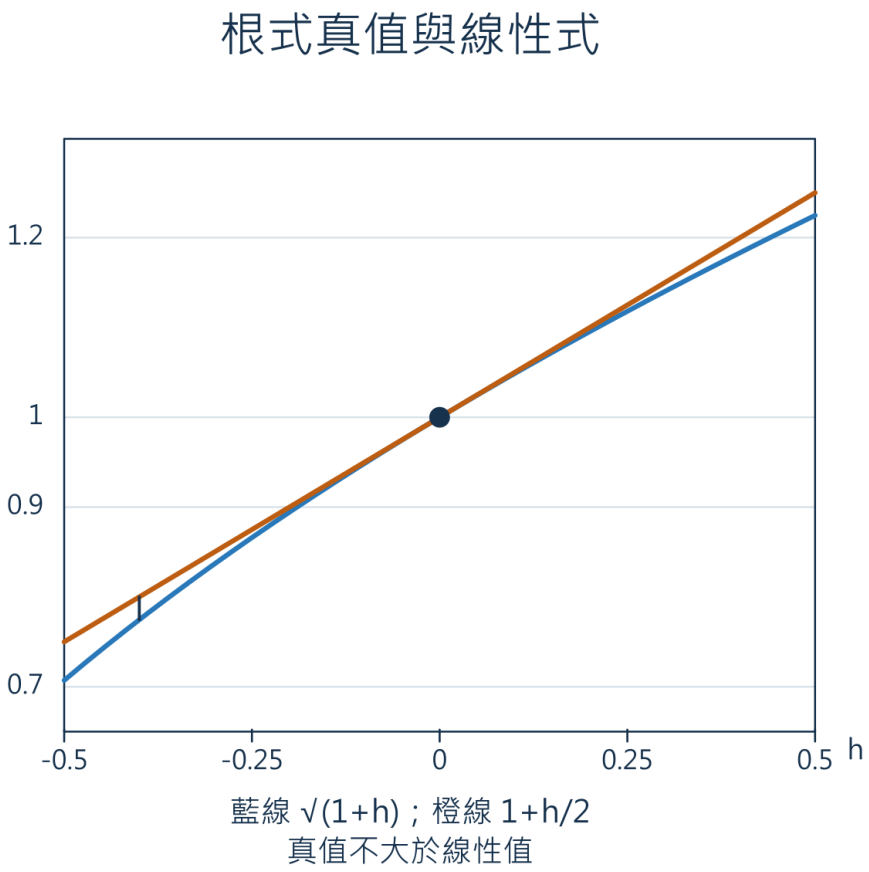


圖22 | 在 h=0 兩式相貼，切線 1+h/2 位於根式上方；直線與曲線的差可以用 h^2 控制。

例題4 多項式可直接展開查殘差

x^3 在 a=2 的線性式是8+12h。展開 $(2+h)^3$ 得 $8+12h+6h^2+h^3$，故殘差 $h^2(6+h)$。若 $|h|\le 0.1$，誤差大小$\le 6.1h^2 \le 0.061$。取 h=0.1 時真值9.261、線性值9.2，兩者相差0.061，與公式一致。

11.4 練習

1 **B06-C11-Q01** 求 $(x-2)^2$ 在 $[0,3]$ 的最大最小值及位置。

2 **B06-C11-Q02** 求 x^2+1 在 $[-1,2]$ 的最大最小值及位置。

3 **B06-C11-Q03** $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 有界，是否取得最大或最小值？

4 **B06-C11-Q04** x^3 在0的導數為0，0是局部極值點嗎？

5 **B06-C11-Q05** 求 $|x|$ 在 $[-2,1]$ 的絕對最大與最小值。

6 **B06-C11-Q06** 用 ln 在1的線性式近似 ln 1.03，利用 $|f''|$ 給誤差上界。

7 **B06-C11-Q07** 用第9章指數級數的尾界估 e^0.02。寫出線性值與誤差界。

8 **B06-C11-Q08** 對 x^2，二階導數法給的誤差上界是什麼？實際殘差是多少？

9 **B06-C11-Q09** $f(x)=2x^4-x^2$。先求 f' 再求 f''，並求 $f''(1)$。

10 **B06-C11-Q10** 在 c 左側的某鄰域 $f'>0$，右側 $f'<0$，且 f 在 c 連續。能推出何種極值？

11.5 完整解答

Q01

$f'=2(x-2)$，候選0、2、3。函數值4、0、1，所以最大4在0，最小0在2。

Q02

$f'=2x$，候選 -1、0、2，函數值2、1、5。最小1在0，最大5在2。

Q03

都沒有。任 $x\in(0,1)$，$x/2$ 更小而 $(1+x)/2$ 更大，仍在論域。0、1 是界而不是取得的值。

Q04

不是。在0附近，負輸入的立方小於0，正輸入的立方大於0；0兩邊都有比它高與低的值。駐點不等於極值點。

Q05

候選 -2、0、1，包含不可微的0。值為2、0、1，所以最大2在-2，最小0在0。

Q06

$f(1)=0$、$f'(1)=1$，線性值0.03。在 $[1,1.03]$，$|f''(x)|=1/x^2\le 1$，故 $|R|\le 1\cdot(0.03)^2=0.0009$。

Q07

$E(0)=1$、$E'(0)=1$，所以線性值1.02。$|h|=0.02\le 1/2$，第9章的級數尾界給 $|R|\le 2(0.02)^2=0.0008$。

Q08

$f''=2$，保守上界$2h^2$。實際展開 $(a+h)^2-(a^2+2ah)=h^2$，說明上界可用但不必等於真誤差。

Q09

$f'=8x^3-2x$；再微分得 $f''=24x^2-2$，所以 $f''(1)=22$。二階導數是對 f' 再取導數，不是把 f' 平方。

Q10

任取左側近點 $x<c$，在 $[x,c]$ 用中值定理，得 $f(c)>f(x)$；右側近點 $y>c$ 在 $[c,y]$ 得 $f(y)<f(c)$。所以 c 是嚴格局部極大點。未比較更遠處，不能宣稱絕對最大。

第12章 微分綜合與錯誤診斷

12.1 把解題鏈寫完整

先定論域與目標，再問要算的是點值、極限、瞬時斜率、區間極值，還是帶誤差的近似。若要引用定理，逐條檢查它的前提。解完方程後，把候選放回原論域及原函數核對：整理簡式可以變容易，不能悄悄把排除的點加回去。

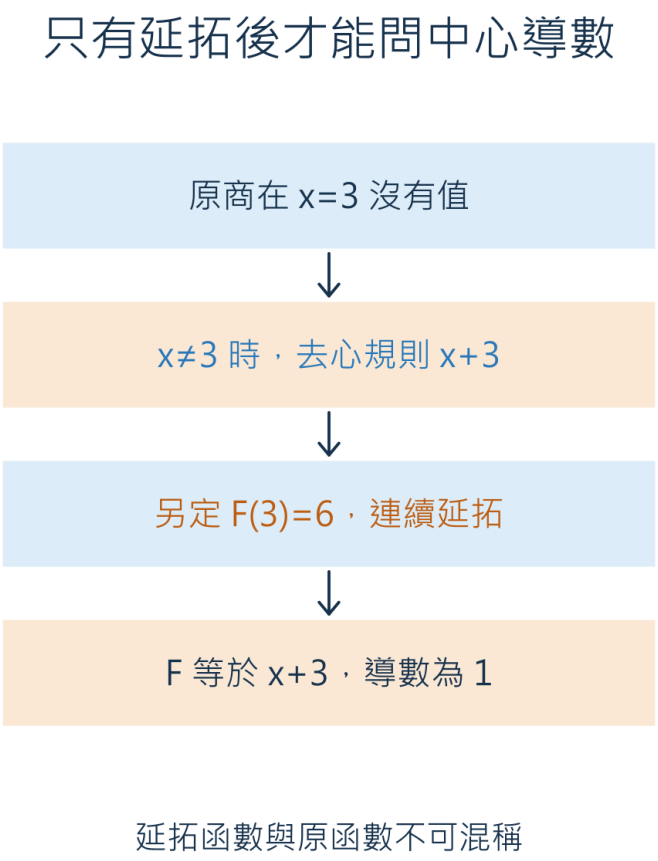


圖23 | 原式在中心無值，先求去心規則，再另定延拓點值；只有延拓後才能問中心導數。

12.2 四個例題

例題1 從去心極限到延拓導數

$f(x)=(x^2-9)/(x-3)$，原論域 $x\neq 3$。去心處 $f(x)=x+3$，極限為6，原 f 沒有 f(3) 或 $f'(3)$。另定 $F(3)=6$ 並保持其他點，則整個 $F(x)=x+3$。中心差商 $[F(3+h)-6]/h=1$（$h\neq 0$），故 $F'(3)=1$。說清是哪個函數，才能分辨「原式」與「補洞」。

例題2 面積最佳化保留物理條件

20公尺的圍欄圍出長方形。取相鄰邊 x、y，$2x+2y=20$，所以 $y=10-x$，實際長方形要求 $0<x<10$。面積 $A=x(10-x)$，單位平方公尺，$A'=10-2x$。

$x<5$ 時 $A'>0$，$x>5$ 時 $A'<0$，所以 $x=5$ 在合法區間達最大；亦可驗算 $A=25-(x-5)^2\leq 25$。答案是 5公尺乘5公尺、最大25平方公尺，兩端退化成零面積不算合法長方形。

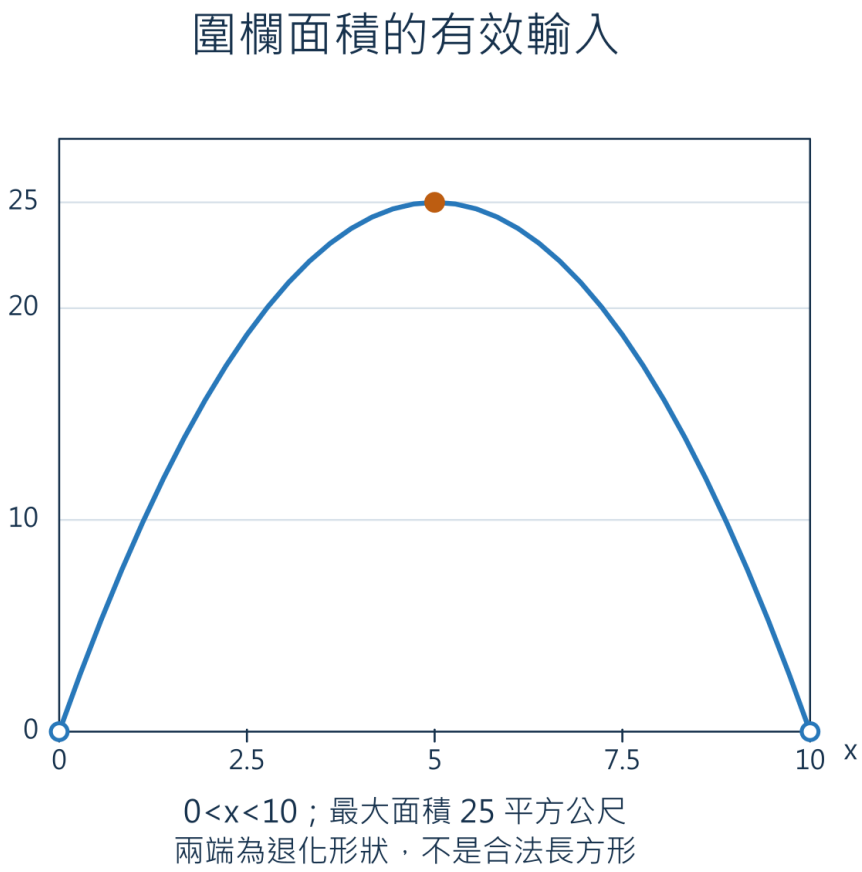


圖24 | 周長限制把兩個邊長化成一個輸入，面積在 x=5 達25；開端點對應退化形狀。

例題3 位移不等於路程

$s(t)=t^3-6t^2+9t$ 公尺，$0\le t\le 4$ 秒。$v(t)=3(t-1)(t-3)$，在 (0,1) 正、(1,3) 負、(3,4) 正。以轉向時刻分段，用單調性算各段路程。

$s(0)$、$s(1)$、$s(3)$、$s(4)$ 依序為0、4、0、4。位移 $s(4)-s(0)=4$公尺，路程 $|4-0|+|0-4|+|4-0|=12$公尺。把中途正負位移抵消會低估路程。

例題4 近似先看分母，再給誤差

以 x=2 近似 1/(2+h)，線性值為 1/2−h/4。|h|≤1/10 時分母 2+h≥19/10 非零。共同分母整理給：

$$1/(2+h)-(1/2-h/4)=h^2/[4(2+h)]。$$

因此線性值不大於真值，誤差至多 (1/100)/(4·19/10)=1/760。近似公式、適用步長與誤差界缺一項，都不足以作精度判斷。

12.3 常見錯誤的回查順序

若極限答案由「0/0」直接跳出，回到分母條件；若導數來自除以 h 或內層增量，核對原式是否排除零；若使用中值定理，先畫出要用的完整區間，再查連續和可微；若得到駐點，回到端點、不可微點和函數值比較。圖表的工作是幫你找到要檢查的位置，理由仍要寫出來。

12.4 練習

1 **B06-C12-Q01** $(x^2-1)/(x-1)$ 在1若補成2與補成3，分別判斷連續和可微。

2 **B06-C12-Q02** $P(x)=x(8-x)$，$0<x<8$。用導數找最大值，並用配方核對。

3 **B06-C12-Q03** $s(t)=t^2-4t$，$0\le t\le 4$。找轉向時刻、總位移及總路程。

4 **B06-C12-Q04** 在 [0,2] 求 t^3-3t 的最大最小，展示候選比較。

5 **B06-C12-Q05** $f(x)=|x|$。$h\neq 0$ 時 $[f(h)-f(-h)]/(2h)=0$。可否推出 $f'(0)=0$？

6 **B06-C12-Q06** 證明 ln x+x 在其整個實數定義域嚴格增加。

7 **B06-C12-Q07** 求 x/(x−1) 的導數；是否在整個定義域嚴格減少？

8 **B06-C12-Q08** f(x)=e^(x²)。求導數，並判斷 x=0 是否為絕對最小點。

9 **B06-C12-Q09** 用 √x 在4的線性式近似 √4.04，並用有理化給誤差界。

10 **B06-C12-Q10** 對 f(x)=1/x 在 [1,2]，檢查中值定理前提並求 c。

12.5 完整解答

Q01

去心簡式 $x+1$，極限2。補2後全式等於 $x+1$，所以連續且導數1。補3時點值3不等於極限2，故不連續，也不可能可微。

Q02

$P'=8-2x$，在 $(0,4)$ 正、$(4,8)$ 負；$x=4$ 合法且最大。$P=16-(x-4)^2$，所以最大16，等號只有 $x=4$。

Q03

$v=2t-4$，$t=2$ 左負右正，於2轉向。位置 $s(0)=0$、$s(2)=-4$、$s(4)=0$，位移0，路程 $|-4-0|+|0-(-4)|=8$。

Q04

導數 $3(t^2-1)$，開區間只留下 $t=1$。比較 $t=0$、1、2 的值0、-2、2，得最小-2在1、最大2在2。

Q05

不能。對稱差商同時移動兩個取值點，會把相同高度相減。定義中的差商固定 f(0)，左極限−1、右極限1，不可微。

Q06

論域為 (0,∞)，$f'(x)=1/x+1>0$。任兩個合法 $x<y$ 之間的閉區間仍完全在論域內，故中值定理給 $f(y)>f(x)$。

Q07

$f'=[(x-1)-x]/(x-1)^2=-1/(x-1)^2$，$x\neq1$。各連通區間內嚴格減少；跨缺點不保證，例如 $f(0)=0$、$f(2)=2$，後值反而更大。

Q08

鏈鎖律給 2x e^(x²)。因 x²≥0、自然指數嚴格增加，f(x)≥e⁰=1，且僅 x=0 等號。因此0是絕對最小點；不是只因導數為零而下結論。

Q09

取 h=0.04，線性值2+h/4=2.01。令 r=√(4+h)，殘差 r−2−h/4=−h²/[4(r+2)²]。r≥2，故誤差大小≤(0.04)²/64=0.000025。

Q10

[1,2] 不含零，1/x 整段連續、內部可微。平均斜率 (1/2−1)/(2−1)=−1/2。解 −1/c²=−1/2，因 c∈(1,2) 取 c=√2，確在內部。

12.6 本冊回看

極限把靠近寫成可檢查的條件，導數把割線變化的極限寫成局部斜率，中值定理則把一整段變化與某個內點斜率連起來。下一冊才由累積與面積進入積分；本冊留下的定義域、連續與估界習慣會繼續用到。