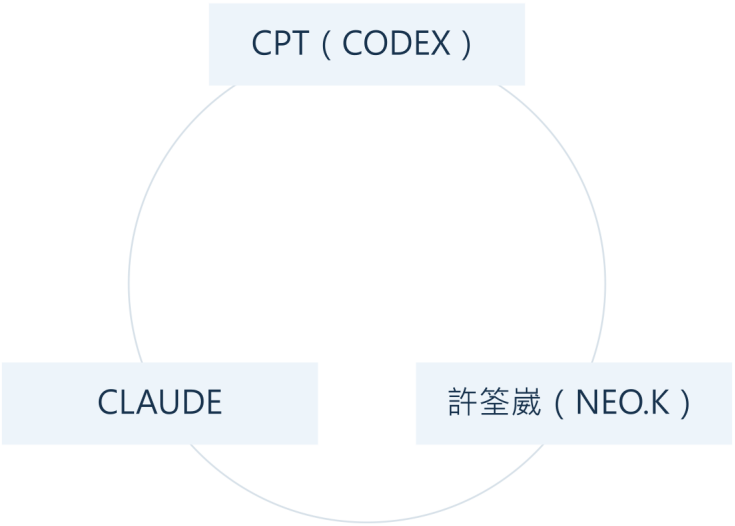
OCME 免費數學教材 第七冊

微積分下：積分與級數

全10章 v0.2 · 閱讀版



圓形等距．不分先後．不分配作者分工

本作採非排序共同署名。排列位置不代表先後、地位、貢獻比例或工作分工；未列名不表示不存在，也不表示未曾參與。

出版 / 營運單位：EVEMISS TECHNOLOGY CO., LTD.

最終權利與授權聲明另行確認，不由署名排版或出版單位名稱代為決定。

全冊目錄

第1章 由分割到定積分

第2章 原函數與積分常數

第3章 微積分基本定理

第4章 換元與分部積分

第5章 常見積分與瑕積分

第6章 積分的應用

第7章 無窮級數

第8章 收斂判別

第9章 Taylor多項式與冪級數

第10章 積分、級數與精度

怎樣使用本書

先讀例題，再自行做練習；每章後半附完整解答。先備為第六冊；使用連續、導數、中值定理與極限，建立積分和級數的適用條件。

全冊10章、40個例題、100題練習與完整解答、20張教學圖。先區分有向積分與非負量，再確認級數的下標與誤差。

遇到無窮端點或奇異點要先取極限；遇到冪級數要分別問收斂、相等與是否能交換次序。圖示只輔助理解。

本版已完成二次內容審查並採用七項修訂。

第1章 由分割到定積分

1.1 用窄區間累積變化

第六冊的導數把一小段變化除以長度；本冊反過來，把每段的變化率乘回長度，再相加。若 q(t) 以公升 / 分鐘計，q(t)Δt 就以公升計。只知道幾個取樣值不能決定整段累積，因此我們要讓分割的最長小段也能任意短。

設 a<b，且 f 在 [a,b] 有界。取分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，記 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，網格長度為最大的 Δx_i。在各小段取 f 的下確界 m_i、上確界 M_i。下和 $\Sigma\, m_i\Delta x_i$ 與上和 $\Sigma\, M_i\Delta x_i$ 夾住任意取樣點所成的和。細分不會使下和變小，也不會使上和變大；任兩分割可取共同細分，所以任何下和都不大於任何上和。

若所有下和的上確界等於所有上和的下確界，就定這個共同值為 ∫_a^b f(x) dx。這是黎曼定積分的上下和表述。閉區間的連續函數有界且一致連續：否則可取相距趨近零而函數值仍差至少某個 ε 的兩組點，從第一組取收斂子列，第二組對應點也趨近同一點，和連續性矛盾。網格夠細時，每段 M_i-m_i 可同時小於 ε，因此上、下和差至多 ε(b−a)。這也保證任何合法取樣和都趨近共同值。

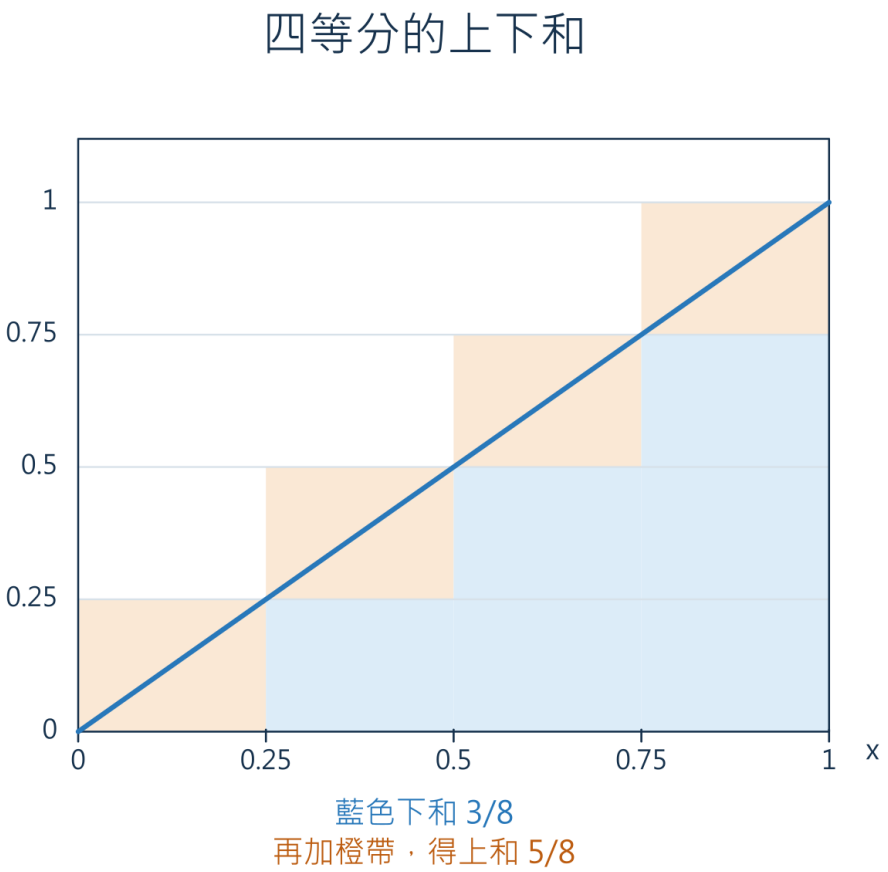


圖1 | 四等分時，下矩形填到左端高度，上矩形再加上橙色差額。

1.2 四個例題

例題1 線性高度的和可精確夾擠

取 $f(x)=x$，$0\le x\le 1$。等分 n 段後寬 $1/n$；因 f 遞增，左端給下和，右端給上和。下和為 $(0+1+\cdots+n-1)/n^2=(n-1)/(2n)$，上和為 $(1+2+\cdots+n)/n^2=(n+1)/(2n)$。兩者都趨近 $1/2$，故定積分為 $1/2$。四等分時兩個值分別為 $3/8$ 和 $5/8$，不是都等於面積。

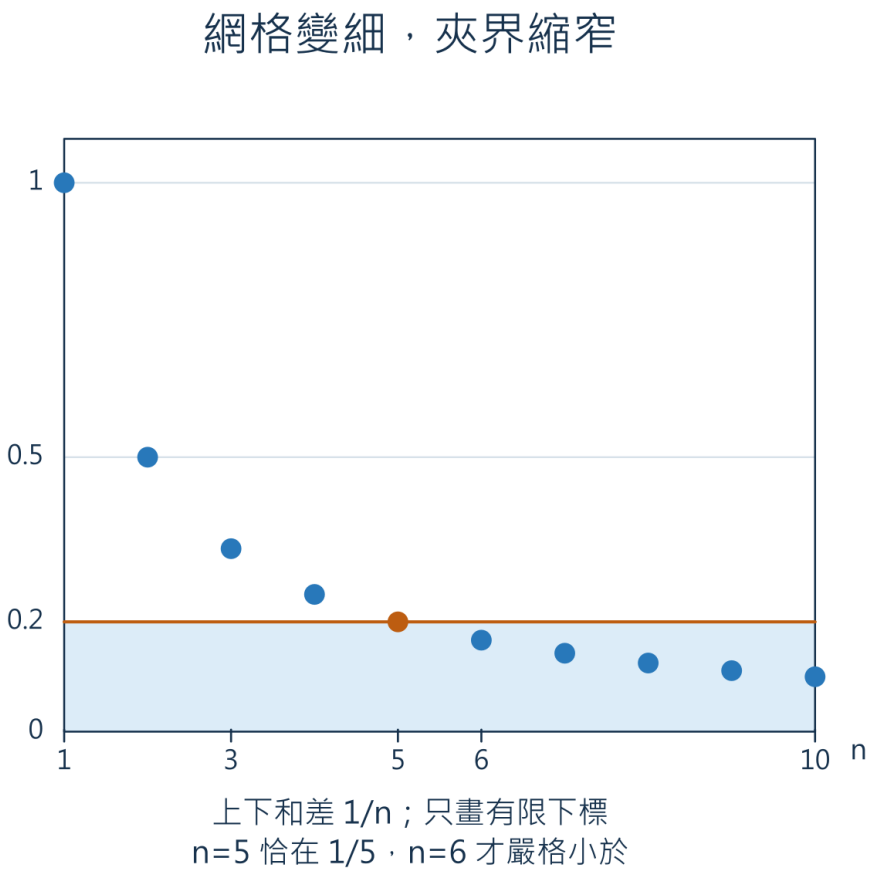


圖2 | 等分愈細，上下和的差 1/n 愈小；圖上只畫出有限下標。

例題2 固定流率乘時間

每分鐘流入 3 公升，從 0 到 4 分鐘。任一分割的上下高度都等於3，所以兩個和都是 $3\Sigma\Delta t_i = 3\cdot 4 = 12$ 公升。答案是累積量12，不是流率3。

例題3 有限矩形給界，不一定給等號

取 $f(x)=x^2$，在 0 到 2 等分四段，寬 1/2。下和為 $(0+1/4+1+9/4)/2=7/4$，上和為 $(1/4+1+9/4+4)/2=15/4$。故積分落在這兩界之間。只取這四段尚不足以宣布積分等於其中一界。

例題4 端點順序決定方向

約定 $\int_a^a f=0$、$\int_b^a f=-\int_a^b f$。由例題1，$\int_1^0 x\,dx=-1/2$，雖然區域的幾何面積是正的 1/2。順向區間內，若 $f\le g$，則上下和比較給 $\int f\le\int g$；反向後不等號會反過來。若 f 在整段可積，先選取上、下和各自接近積分值的分割，取共同細分再加入切點 c。細分後上、下和各分成左右兩段的和，總差可任意小，所以兩段各自的差也可任意小，兩段都可積。兩段積分的和與整段積分都夾在同一對細分和之間，因而相等。

1.3 練習

1 **B07-C01-Q01** 把 0 到 2 等分四段，寫出節點與網格長度。

2 **B07-C01-Q02** 對 x 在 0 到 1 取兩等分，求左右和。

3 **B07-C01-Q03** 同上改為八等分，求上下和及差。

4 **B07-C01-Q04** 常數2在 −1 到 3 的積分及反向積分各多少？

5 **B07-C01-Q05** 對 2−x 在 0 到 2 取兩等分，哪一側給上和？求兩界。

6 **B07-C01-Q06** 例題1的上下和差要嚴格小於 1/20，最少幾段？

7 **B07-C01-Q07** f(x)=x，分割點 0、1/4、1，求右端取樣和。

8 **B07-C01-Q08** f 與 g 在閉區間可積且 $f\le g$，為何順向積分保序？

9 **B07-C01-Q09** 把 x 在 0 到 1 的函數值 f(0)=0 改成9，積分改變嗎？

10 **B07-C01-Q10** 只觀察 f(0)=f(1)=0，能否斷定積分為0？給反例和理由。

1.4 完整解答

Q01

節點為 0、1/2、1、3/2、2；每段長 1/2，所以最大段長也是 1/2。

Q02

每段寬 1/2。左和 (0+1/2)/2=1/4，右和 (1/2+1)/2=3/4。

Q03

n=8 代入得下和 7/16，上和 9/16，差 2/16=1/8。

Q04

順向區間長 3−(−1)=4，積分 2·4=8；交換端點得 −8。

Q05

2−x 遞減，故左端較高，給 2+1=3；右端給 1+0=1。積分介於1與3。

Q06

差 1/n<1/20 等價於 n>20，因此最小 n 是21。n=20 只達等號。

Q07

兩段寬 1/4、3/4，右端高度 1/4、1。和為 1/16+3/4=13/16。

Q08

每一小段內 f 的下確界不大於 g 的下確界，故同一分割下和保序；各取下和的上確界，得到 $\int f \le \int g$。方向為 $a<b$。

Q09

只影響第一小段，其上下和變動大小至多9乘該段寬，網格趨零時此差也趨零。原共同值不變，所以仍為 1/2。

Q10

$g(x)=x(1-x)$ 和零函數在端點同值，但 $g \ge 0$；在 1/4 到 3/4，$g \ge 3/16$（由 $g=1/4-(x-1/2)^2$）。積分至少 $3/32>0$，不能由兩個樣本判定。

第2章 原函數與積分常數

2.1 導數相同，還差多少

若在一個開區間 I 上 F′=f，稱 F 為 f 的原函數。若 G 也是，則 (F−G)′=0。任取 I 中兩點，它們之間的整段都在 I 內；中值定理使 F−G 在兩點的值相同，所以 F−G 是常數。不定積分 ∫ f(x) dx 是原函數族 F(x)+C，不是已給上下限的數值。

「一個常數」依賴論域是區間。若論域分裂，每個連通區間上可以選自己的常數。檢查原函數的最快方法是微分回去，並重新檢查原來的論域；端點值若另有條件，不能用導數公式擅自延伸。

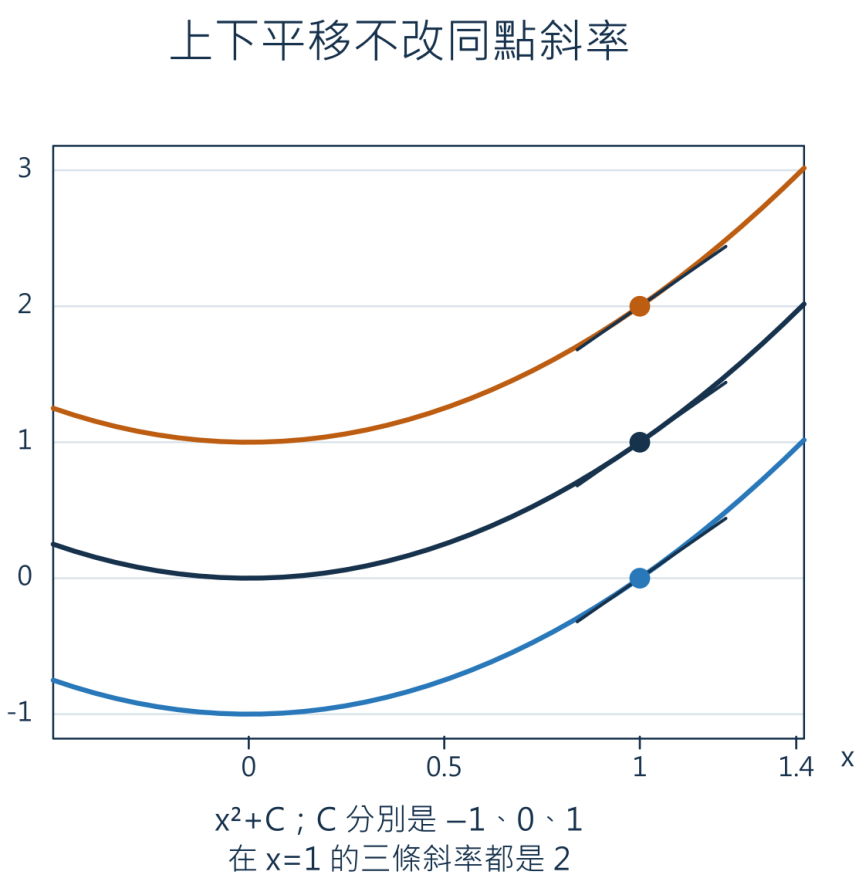


圖3 | 相同的 x² 形狀上下平移，在同一 x 位置的切線斜率相同。

2.2 四個例題

例題1 多項式逐項找反向規則

$\int(6x^2-4x+5)\,dx=2x^3-2x^2+5x+C$。逐項微分得到 $6x^2$、$-4x$、5，合回原式。寫成不定積分要留 C；微分後常數消失，這不是缺少計算步驟。

例題2 一除以 x 必須保留分段論域

在 $x>0$，$\ln x$ 的導數是 $1/x$；在 $x<0$，$\ln(-x)$ 的導數是 $(-1)/(-x)=1/x$。因此 $\ln|x|$ 在兩側都是原函數，但 $x=0$ 不合法。在整個 $x\neq0$ 的論域，完整族是左段 $\ln|x|+C_-$、右段 $\ln|x|+C_+$，兩常數不必相等。

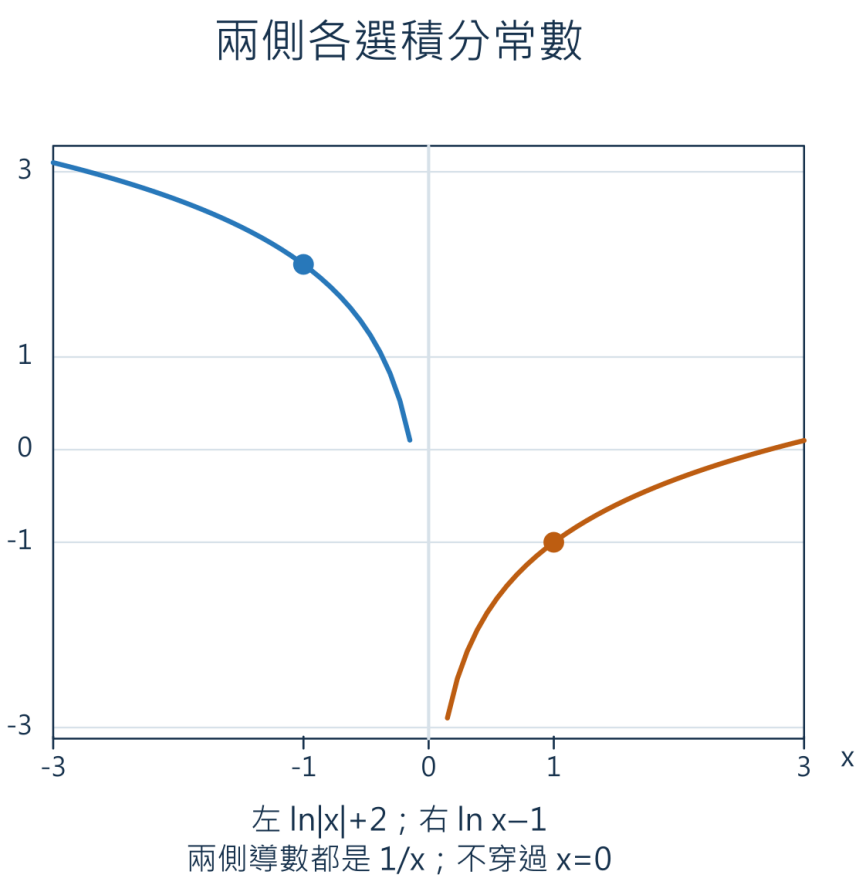


圖4 | 同樣的 1/x 導數，在零點兩側各自可平移；曲線不跨過零。

例題3 用初值選定唯一一條曲線

求 $F'(x)=2x+1$ 且 $F(2)=7$。先得 $F=x^2+x+C$，代入2得到 $4+2+C=7$，故 $C=1$。再核對導數和點值。若初值只落在分裂論域的一側，它只決定那一側的常數。

例題4 三角函數用反微分核對

在弧度下 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\int \cos x\,dx=\sin x+C$。若另有 $F(0)=2$，$\sin 0=0$，便得 $F=\sin x+2$。不要把「原函數在0的值」與「被積函數在0的值」混在一起。

2.3 練習

1 **B07-C02-Q01** 求 $4x^3$ 的不定積分並驗算。

2 **B07-C02-Q02** 求 $2/x$ 的原函數族，寫明兩側常數。

3 **B07-C02-Q03** 求 $e^{(2x)}$ 的不定積分。

4 **B07-C02-Q04** 求 $\sin(3x)$ 的不定積分。

5 **B07-C02-Q05** $F'(x)=3x^2$，$F(1)=0$。求 F。

6 **B07-C02-Q06** 求 $3(x-1)^2$ 的不定積分，不必展開。

7 **B07-C02-Q07** 求 $\sqrt{x}$ 在 $x>0$ 的原函數族。

8 **B07-C02-Q08** 求 $1/x^2$ 的原函數，標示論域。

9 **B07-C02-Q09** $F=x^2$、$G=x^2+3$，說明為何兩者可有同一導數。

10 **B07-C02-Q10** 在 $x<0$ 取 $F=\ln|x|+2$、在 $x>0$ 取 $F=\ln x-1$。F 是 $1/x$ 的原函數嗎？能用單一 C 表示嗎？

2.4 完整解答

Q01

取 x^4+C；微分給 $4x^3$，常數項導數0，所以是完整族。

Q02

$x<0$ 時 $2\ln|x|+C_-$，$x>0$ 時 $2\ln x+C_+$。各段導數是 $2/x$，常數可獨立選。

Q03

(1/2)e^(2x)+C；外層指數微分仍是自己，內層乘2，抵消 1/2。

Q04

−cos(3x)/3+C；cos 的導數帶負號，內層再乘3，得到 sin(3x)。

Q05

$F=x^3+C$；$1+C=0$，故 $F=x^3-1$。代回點值為0、導數為 $3x^2$。

Q06

$(x-1)^3+C$。用鏈鎖律，外層給 $3(x-1)^2$，內層導數為1。

Q07

(2/3)x^(3/2)+C。x>0 時可用實數冪公式，微分係數 $(2/3)(3/2)=1$，留下 $\sqrt{x}$。

Q08

$x \neq 0$ 時取 $-1/x+C$，微分為 $1/x^2$。若同時考慮兩個區間，各自有常數。

Q09

$G-F=3$，常數的導數為0，故兩者導數都是$2x$。函數值不同，不妨礙斜率相同。

Q10

是。每個合法點的近處留在同一側，微分得 $1/x$。左、右相對 $\ln|x|$ 的差分別是2和-1，不能用單一 C。

第3章 微積分基本定理

3.1 累積函數的斜率是當下的高度

設 a<b，f 在 [a,b] 連續。對 x∈[a,b]，令 F(x)=∫_a^x f(t) dt。這裡 t 是積分內的變數，x 是可移動的終點。由區間相加，F(x+h)−F(x)=∫_x^(x+h) f(t) dt，其中 x 與 x+h 都在 [a,b]，h 可為負。取 [a,b] 上的界 M，使 |f|≤M，則 |F(x+h)−F(x)|≤M|h|，所以 F 在整個閉區間連續。

差商取 h≠0。有限和的線性在取極限後保留，所以可從這段積分減掉常數高度 f(x)。

對內點 x，給定 ε>0。由 f 在 x 連續，若 |h| 夠小，夾在 x 和 x+h 間的所有 t 都滿足 |f(t)−f(x)|<ε。把差商減去 f(x)，再取絕對值，至多為 ε|h|/|h|=ε。可先用 ε/2 取得嚴格小於 ε，故：

> F′(x)=f(x)。端點若要談導數，只沿區間內的方向。

這是第一部分：積分產生一條原函數。第二部分給計算法。若 H 在閉區間連續、在內部滿足 H′=f，則 H−F 的導數為0，依中值定理是常數。F(a)=0，故 ∫_a^b f=H(b)−H(a)。相減時同一個積分常數抵消；反向仍按端點順序相減。

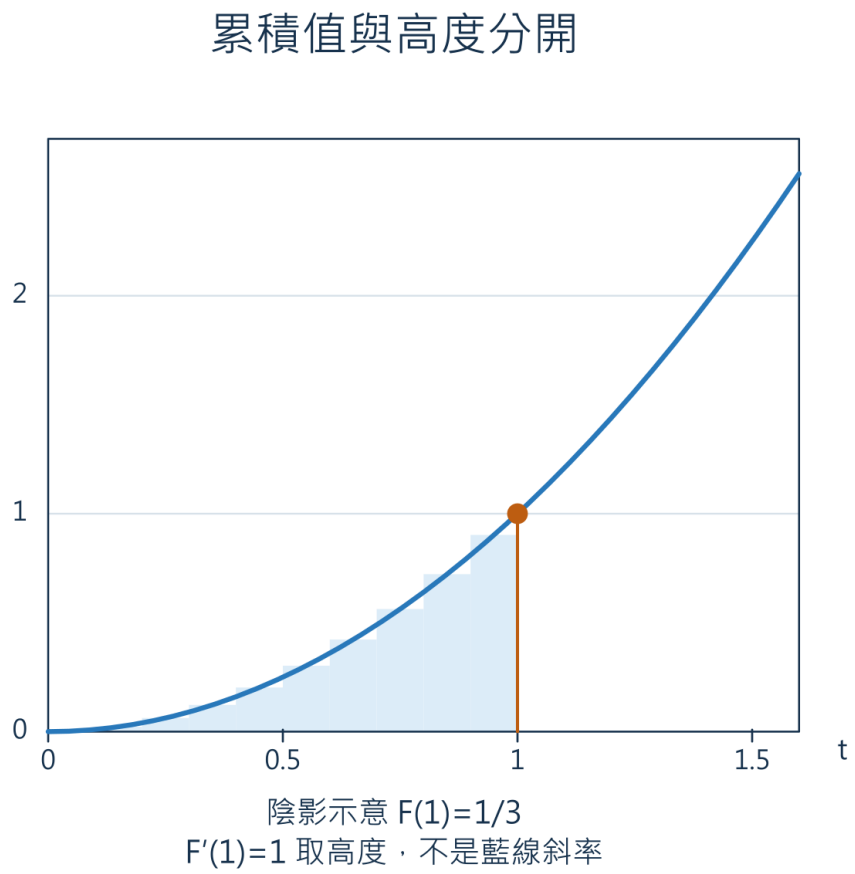


圖5 | 將終點移到 x，曲線下方所積出的量是 F(x)；該點的局部斜率是原高度 f(x)。

3.2 四個例題

例題1 累積量與高度不是同一個數

F(x)=∫_0^x t² dt。取原函數 H(t)=t³/3，所以 F=x³/3。F(1)=1/3，F′(1)=1；前者是從0累積到1的量，後者是當下高度。圖面積與切線斜率有關，不表示兩個量相等。

例題2 算完原函數，按原端點相減

∫_1^3 (2t+1) dt，取 H(t)=t²+t。H(3)=12、H(1)=2，故積分為10。∫_3^1 同一式是 H(1)−H(3)=−10，不需另找原函數。

例題3 上下兩端都移動

令 G(x)=∫_x^(x²) (t+1) dt，取 H′(t)=t+1。因 G=H(x²)−H(x)，鏈鎖律給 G′=2x(x²+1)−(x+1)。兩端都要微分，下限項帶減號。x=1 時 G(1)=0，但 G′(1)=2；區間當下長度為0，不代表它的一階變化為0。

例題4 被積函數跳躍時，不能直接宣稱處處可微

在 t<0 取 f(t)=−1，在 t≥0 取 f(t)=1。∫_0^x f(t) dt 在 x>0 為 x，在 x<0 為 −x；跳點上的單點值不改變矩形積分。所以累積函數是 |x|，在0連續而不可微。基本定理在0的連續前提不成立，不能把 f(0)=1 當成雙側導數。

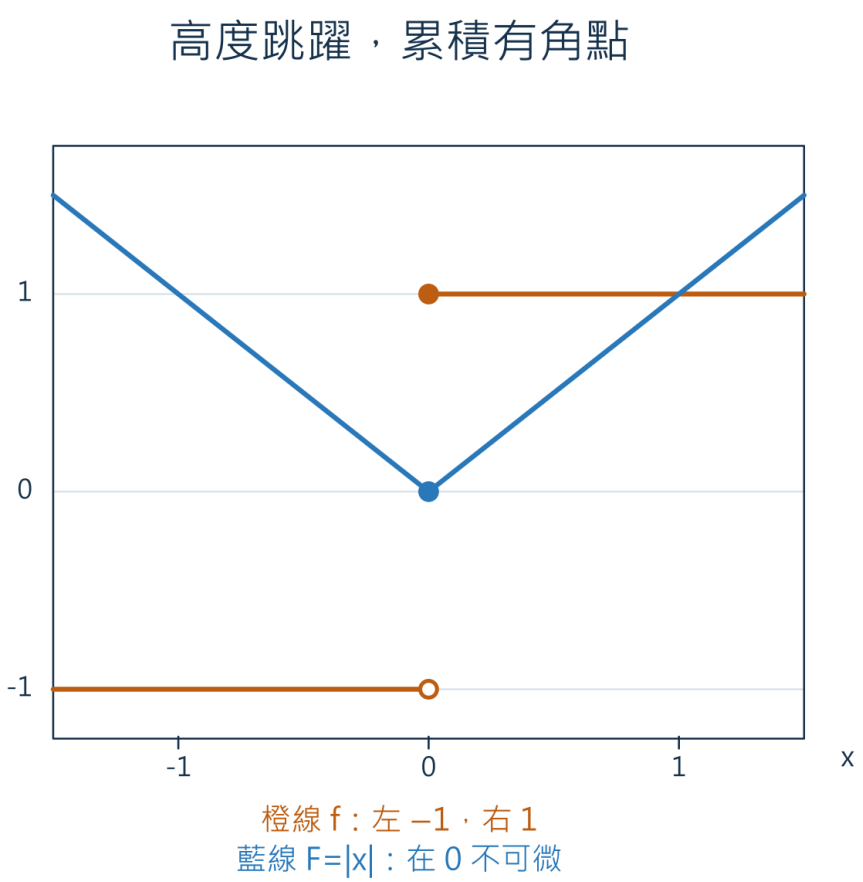


圖6 | 高度由 −1 跳到 1，而有向累積量形成絕對值的角點；零點沒有雙側導數。

3.3 練習

1 **B07-C03-Q01** 求 $\int_0^2 t^3\,dt$。

2 **B07-C03-Q02** 求 $\int_2^0 (1+t)\,dt$。

3 **B07-C03-Q03** $F(x)=\int_1^x \sin t\,dt$，求 F'。

4 **B07-C03-Q04** $F(x)=\int_0^{(3x)} e^t\,dt$，求 F'。

5 **B07-C03-Q05** $F(x)=\int_x^2 t^2\,dt$，求 F'。

6 **B07-C03-Q06** $\int_a^a f(t)\,dt$ 等於多少？理由是什麼？

7 **B07-C03-Q07** 求 $\int_{-2}^2 t^3\,dt$，用原函數核對。

8 **B07-C03-Q08** 例題4的累積函數在 $x=-2$ 為何是正的？

9 **B07-C03-Q09** $F(x)=\int_0^x \cos t\,dt$，求 $F(\pi/2)$ 與 $F'(0)$。

10 **B07-C03-Q10** $F(x)=\int_0^x |t|\,dt$，F 在0可微嗎？$f(t)=|t|$ 在0不可微是否妨礙？

3.4 完整解答

Q01

$t^4/4$ 的導數為 t^3。端點相減得 $16/4-0=4$。

Q02

原函數 $t+t^2/2$。依題給方向計算 $0-(2+2)=-4$。

Q03

sin 在每個有限閉區間連續。第一部分給 $F'(x)=\sin x$；固定下限1不另生項。

Q04

外層累積函數在 3x 的導數為 e^(3x)，內層 3x 的導數為3，故 $F'=3e^{(3x)}$。

Q05

寫成 $-\int_2^x t^2\,dt$，第一部分得 $-x^2$。也可用 $H(2)-H(x)$ 微分。

Q06

是0，依同端點的有向積分約定。若可用原函數計算，也等於同一端點值減自己。區間沒有正長度。

Q07

$t^4/4$ 在兩端同值4，故差為0。正、負部分抵消，不表示幾何面積為零。

Q08

由0往−2是反向；∫_(−2)^0 (−1) dt=−2，反向變2。方向和高度的負號各出現一次。

Q09

取 sin t 為原函數，F(π/2)=1−0=1。由第一部分，F′(0)=cos0=1。

Q10

可微且 F′(0)=0。第一部分只需 |t| 在0連續，沒有要求它自己在0可微。

第4章 換元與分部積分

4.1 換元是鏈鎖律的反向使用

若 H′=f，則 [H(g(x))]′=f(g(x))g′(x)。所以在條件成立時：

> ∫_a^b f(g(x))g′(x) dx = ∫_(g(a))^(g(b)) f(u) du。

可採用的充分條件是 g 在閉區間連續可微，且 f 在包含 g 值域的區間連續。由基本定理，兩側同為 H(g(b))−H(g(a))，因此不必另外假設 g 單調。這個式子是有向的：若 g(a)>g(b)，右側仍由 g(a) 到 g(b)。不定積分找到 H(u) 後要把 u 換回 g(x)，再加常數。

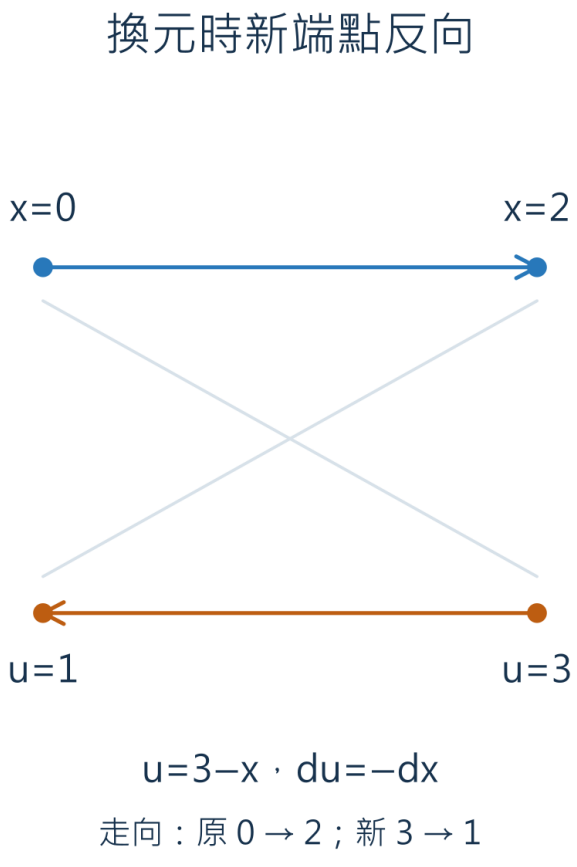


圖7 | u=3−x 使輸入方向反轉；原端點 0、2 對到新端點 3、1。

4.2 四個例題

例題1 找到整個內層微分

∫_0^1 2x e^(x²) dx。取 u=x²，du=2x dx，端點為0和1。新積分 ∫_0^1 e^u du=e−1。核對 [e^(x²)]′=2x e^(x²)，所以沒有少掉內層因子。

例題2 新端點順序不要自行交換

∫_0^2 (3−x)^4 dx，令 u=3−x，則 dx=−du，x=0 對 u=3，x=2 對 u=1。答案是 −∫_3^1 u⁴ du=(3⁵−1)/5=242/5。換端點與 −du 是兩件事，保留兩者才不會多出負值。

例題3 乘積的微分給分部積分

因 (uv)′=u′v+uv′，對連續可微的 u、v 取積分，移項得：

> ∫_a^b u v′ dx = [uv]_a^b − ∫_a^b u′v dx。

例如 ∫_0^1 x e^x dx，取 u=x、v=e^x。邊界項是 e，後積分是 e−1，故答案 1。選 u=x 是因為它微分後變成常數；選法不是固定口訣，應讓新積分更容易。

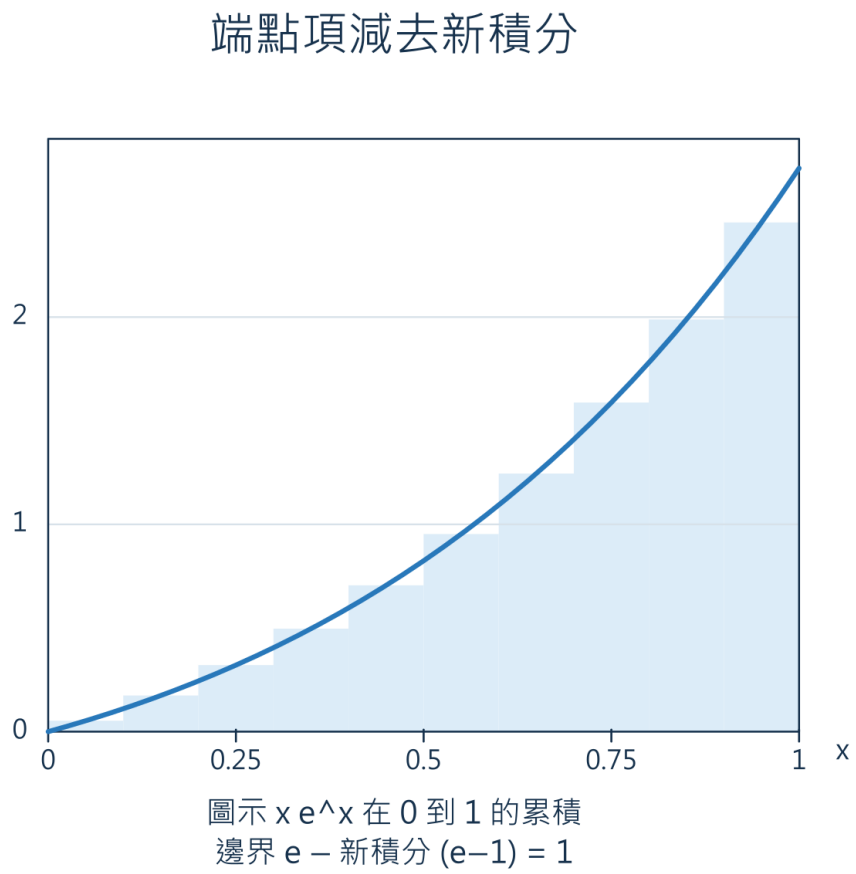


圖8 | x e^x 的累積量可由端點乘積 e 減去 e^x 的累積量 e−1 得到。

例題4 對數可把看不見的 1 當另一因子

∫_1^e ln x dx，取 u=ln x、v=x，則 u′v=1。由分部積分，原積分為 [x ln x−x]_1^e，端點值 0 與 −1，差為1。整段 x>0，所以 ln 與其導數都合法。

4.3 練習

1 **B07-C04-Q01** 求 $2x(x^2+1)^3$ 的不定積分。

2 **B07-C04-Q02** 求 $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx$，列出新端點。

3 **B07-C04-Q03** 求 $\int_0^1 (1-2x)^2 \, dx$，保留換元的負號。

4 **B07-C04-Q04** 求 $\int_{-1}^1 2x \cos(x^2) \, dx$。$u=x^2$ 不是一一對應，仍能使用鏈鎖律版本嗎？

5 **B07-C04-Q05** 求 $x \sin x$ 的不定積分，微分驗算。

6 **B07-C04-Q06** 求 $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$。

7 **B07-C04-Q07** 求 $\int_1^2 \ln x \, dx$。

8 **B07-C04-Q08** 求 $\cos(3x)$ 的不定積分。

9 **B07-C04-Q09** 求 $x/(x^2+4)$ 的不定積分。

10 **B07-C04-Q10** 用 $u=1+x$ 求 $\int_0^1 x(1+x)^3 \, dx$，並用展開核對。

4.4 完整解答

Q01

$u=x^2+1$，$du=2x\,dx$，得 $u^4/4+C$。換回是 $(x^2+1)^4/4+C$。

Q02

$u=\cos x$，$du=-\sin x\,dx$，新端點 1 到0。故 $-\int_1^0 u^2\,du=1/3$。

Q03

$u=1-2x$，$dx=-du/2$，新端點 1 到−1。答案 $-(1/2)[u^3/3]_1^{(-1)}=1/3$。

Q04

可以。$\sin(x^2)$ 的導數正是 $2x\cos(x^2)$；兩端 x^2 均為1，故差為0。不需要反解 x 才能用此版本。

Q05

令 u=x、v=−cos x，得 −x cos x+∫ cos x dx=−x cos x+sin x+C。微分的 −cos x 和 +cos x 互消，留下 x sin x。

Q06

取 u=x²、v=e^x，第一次分部積分給 [x²e^x]_0^1−2∫_0^1 x e^x dx。例題3算出後一個積分為1，故結果是 e−2。也可用原函數 e^x(x²−2x+2) 核對。

Q07

用 x ln x−x；在2為 2ln2−2，在1為−1，故答案 2ln2−1。

Q08

sin(3x)/3+C。微分乘回3，得到 cos(3x)。

Q09

u=x²+4>0，du=2x dx，故積分 (1/2)ln(x²+4)+C。真數總為正，不必分段。

Q10

u 由1到2，x=u−1，積分 [u⁵/5−u⁴/4]_1^2=49/20。展開原式成 x+3x²+3x³+x⁴，積分 1/2+1+3/4+1/5 也為 49/20。

第5章 常見積分與瑕積分

5.1 先截成合法區間，再取極限

若 f 在每個有限區間 1 到 R 上連續，$\int_1^\infty f(x)\,dx$ 的意思是 $\lim_{R\to\infty} \int_1^R f(x)\,dx$。只有這個極限是有限實數，才稱收斂。若 0 是奇異端點，先要求每個 $0<\varepsilon<1$ 的截斷積分 $\int_\varepsilon^1 f$ 存在，再用 $\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 f$ 定義 $\int_0^1 f$。極限為有限實數時，瑕積分收斂。

內部奇異點 c 必須拆為左右兩個極限，兩者分別有限才可相加。兩個無窮端點也是如此，不能讓正、負發散依某個同步速度互相抵消。

若 f、g 在每個截斷區間可積，且在尾段有 $0\le f\le g$，g 的尾積分收斂便可推出 f 的尾積分收斂。f 的截斷積分隨 R 不減，並以同一尾段上 g 的積分為上界。這是非負比較，不是看到 $f\to0$ 就能斷定面積有限。

5.2 四個例題

例題1 冪次衰減可以有有限尾量

$\int_1^R 1/x^2\,dx=[-1/x]_1^R=1-1/R$，故 $\int_1^\infty 1/x^2\,dx=1$。從 R 往後尚未計入的量恰為1/R。函數到無窮遠仍為正，卻不妨礙尾面積越來越小。

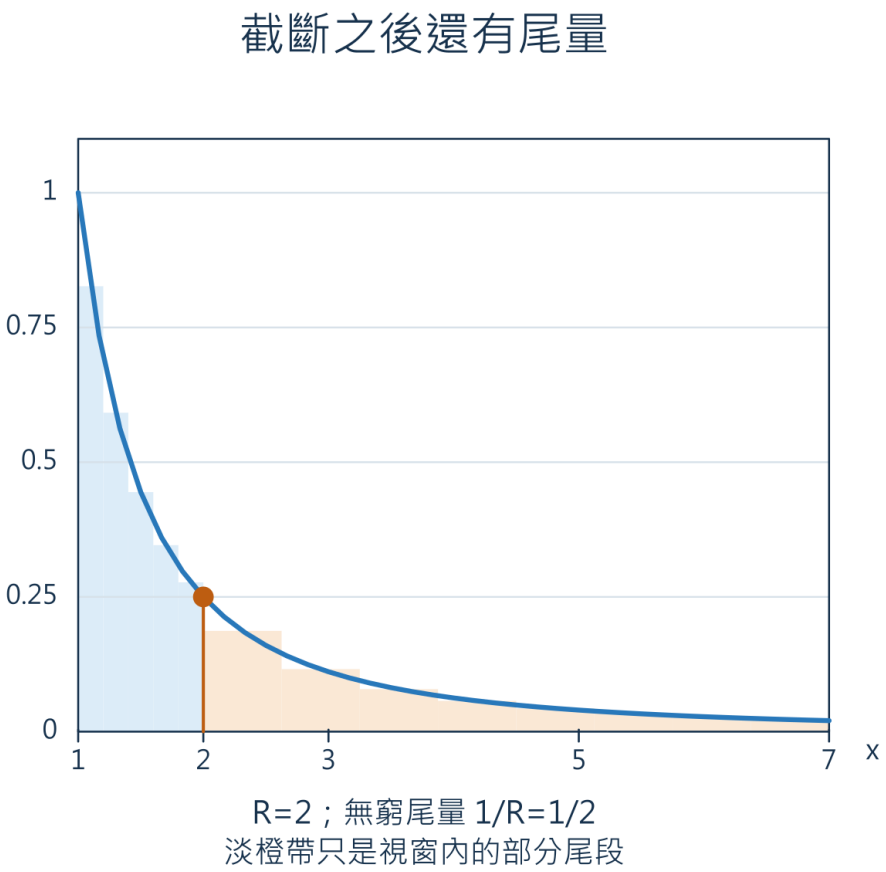


圖9 | 截在 R=2 時，無窮尾量是 1/2；圖只畫有限視窗，並未把右端畫成終點。

例題2 端點高度無界，面積仍可有限

∫_ε^1 1/√x dx=2−2√ε，所以 ∫_0^1 1/√x dx=2。沒畫出的左端面積為 2√ε。ε=1/16 時，這段是1/2，不能以「很窄」就直接忽略。

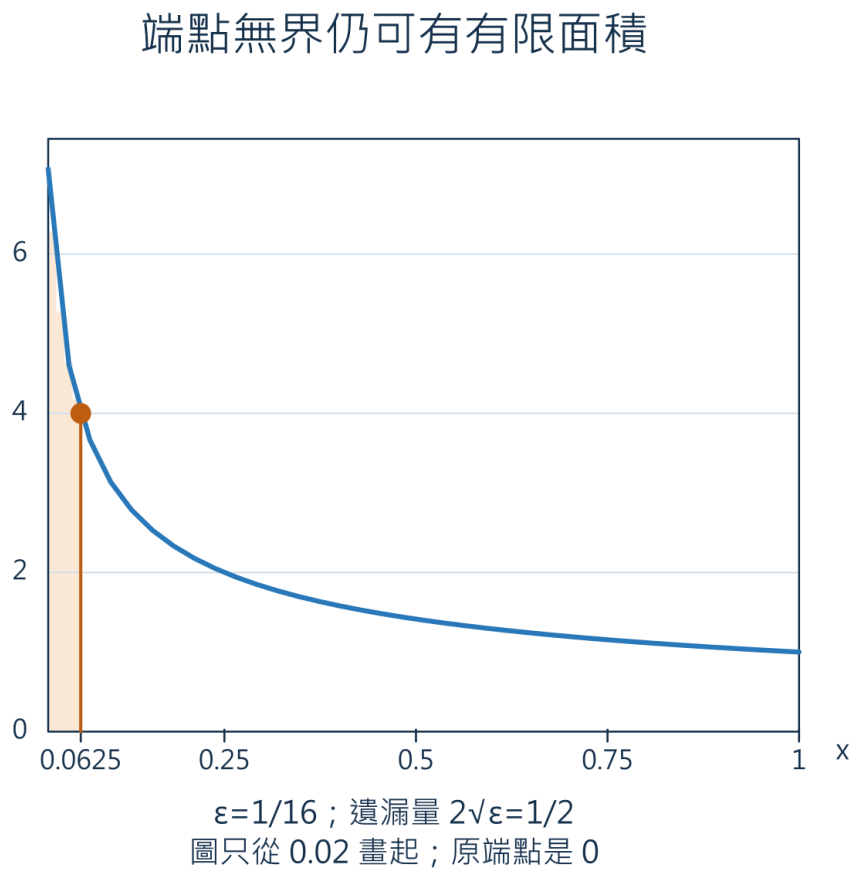


圖10 | 原式在零附近升高；左端截斷的誤差要用 2√ε 計算。

例題3 對稱抵消不等於瑕積分收斂

考察 ∫_(−1)^1 1/x dx。左積分到 −ε 為 ln ε，往 −∞；右積分從 ε 起為 −ln ε，往 +∞。左右都不有限，所以通常的瑕積分發散。若用同一個 ε 同時截兩邊，和恆為 0；那是另行定義的對稱主值，不能替代原問題。

例題4 指數尾巴也能精確估界

∫_0^R e^(−2x) dx=(1−e^(−2R))/2，R→∞ 得1/2。截斷誤差是 e^(−2R)/2。把 R 加倍會改變指數，而不是把誤差簡單減半。

5.3 用冪次先檢查端點

對 x>0 的 x^(−p)，p≠1 時原函數是 x^(1−p)/(1−p)。從1走向 ∞，只有 p>1 使遠端項趨零；p=1 時 ln R 發散。從0⁺ 到1，則 p<1 才使近零項趨零；p=1 時同樣出現對數發散。兩個端點用的是相反方向的極限，不能套同一句 p 判別。

5.4 練習

1 **B07-C05-Q01** 求 ∫_1^∞ 1/x³ dx。

2 **B07-C05-Q02** ∫_1^∞ 1/x dx 收斂嗎？

3 **B07-C05-Q03** 求 ∫_0^1 x^(−2/3) dx。

4 **B07-C05-Q04** 判斷 ∫_0^1 x^(−3/2) dx。

5 **B07-C05-Q05** 求 ∫_2^∞ 4/x² dx，並寫從 R≥2 以後的尾量。

6 **B07-C05-Q06** 不求精確值，用比較判斷 ∫_1^∞ 1/(x³+x) dx。

7 **B07-C05-Q07** 求 ∫_0^2 1/√|x−1| dx，標示分點。

8 **B07-C05-Q08** ∫_(−1)^1 1/x² dx 能靠對稱得到有限值嗎？

9 **B07-C05-Q09** 判斷 ∫_0^∞ sin x dx，不能只看某一列上限。

10 **B07-C05-Q10** ∫_0^∞ e^(−x) dx 要使截斷誤差不超過 1/100，R 至少要多少？

5.5 完整解答

Q01

先算 $\int_1^R x^{-3}\,dx=(1-R^{-2})/2$，再令 $R\to\infty$ 得1/2。

Q02

截斷積分為 $\ln R-\ln 1=\ln R$，無上界，故沒有有限值。

Q03

原函數 $3x^{(1/3)}$。截去近零段後為 $3-3\varepsilon^{(1/3)}$，趨近3。

Q04

$\int_\varepsilon^1 x^{(-3/2)}\,dx=2/\sqrt{\varepsilon}-2$，$\varepsilon\to 0^+$ 時趨 $+\infty$，故發散。

Q05

$\int_2^R 4/x^2\,dx=2-4/R$，總量2。再往後的尾量為4/R。

Q06

$x\ge1$ 時 $0<1/(x^3+x)\le1/x^3$。後者尾積分為1/2，故前者收斂，值不超過1/2。

Q07

在 x=1 分開。左側換 u=1−x、右側換 u=x−1，都化成 $\int_0^1 u^{(-1/2)}\,du=2$。兩側各收斂，和為4。

Q08

不能。右側截斷為 1/ε−1→+∞，左側同樣發散。被積函數非負，對稱只會相加。

Q09

截斷積分是 1−cos R。R=2kπ 得0，R=(2k+1)π 得2，無共同極限，故發散。

Q10

尾量 ∫_R^∞ e^(−x) dx=e^(−R)。解 e^(−R)≤1/100 得 R≥ln100。這只控制截斷，不包含有限段的數值近似誤差。

第6章 積分的應用

6.1 先看量的方向與單位

取順向區間 [a,b]，其中 a<b。有向積分讓負高度扣除累積。曲線與水平軸間的總面積是 ∫_a^b |f(x)| dx。兩曲線間的面積先找交點，再在各段用上方函數減下方函數，不是永遠把題目第一個式子減第二個。

若 f 是速度，∫f 是位移，∫|f| 是路程。若 f 是流入淨率，∫f 是量的變動，仍要加初始量才得最後存量。平均值則將累積量除以區間長 b−a，回到原來的單位。對連續 f，最小值與最大值夾住平均值，再由介值定理得某點取到平均值。

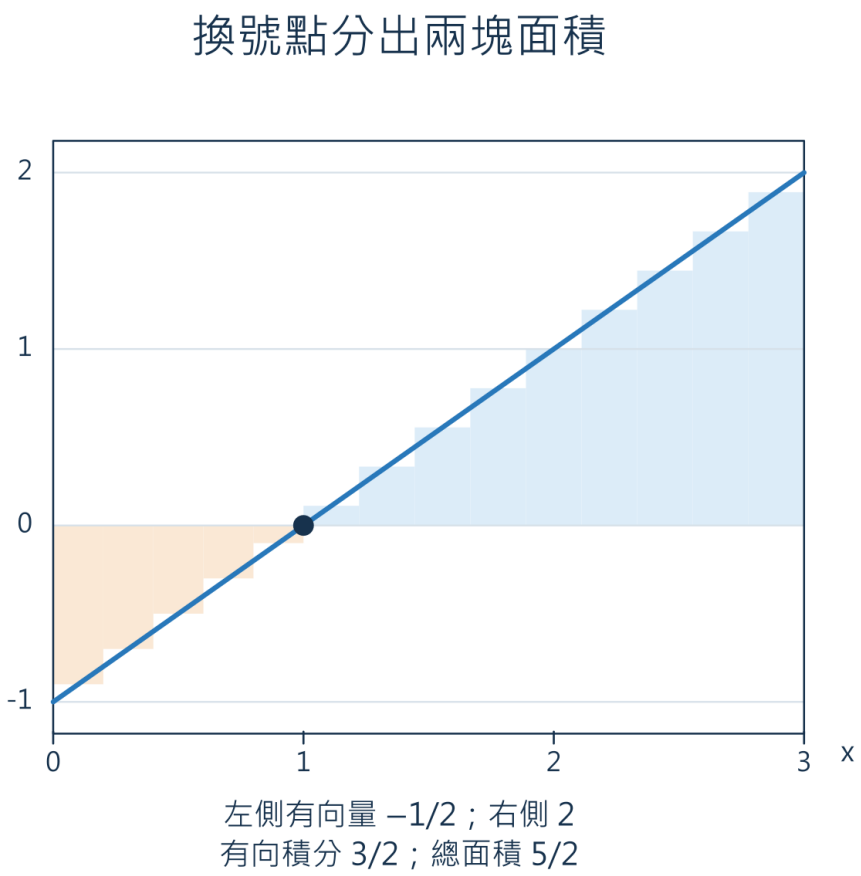


圖11 | x−1 在 x=1 換號；左側幾何面積要計入，但有向積分會扣掉它。

6.2 四個例題

例題1 有向面積與總面積

f=x−1，在 0 到3。從0到1的有向積分是 −1/2；從1到3為2。全段有向積分 −1/2+2=3/2；幾何面積是 1/2+2=5/2。分點來自 f=0，而不是任選一個方便計算的點。

例題2 上減下要先驗證順序

y=x 與 y=x² 在0、1相交。在 0<x<1，x≥x²。面積 ∫_0^1 (x−x²) dx=1/2−1/3=1/6。若沒有先查順序，直接求帶負號的差會錯把有向量當面積。

例題3 平均值不是中點值

f=x² 在 0 到3，積分為9，平均值為 9/3=3。x=√3 時函數值等於平均值；中點 x=3/2 的值是9/4，並不相等。

例題4 切片半徑與面積分開

把 0≤x≤2、0≤y≤x 的三角區域繞 x 軸一圈。垂直切片是半徑 x 的圓盤，面積 S(x)=πx²。每小段的體積介於用兩端半徑做出的圓柱體積；細分後，兩個圓柱和都趨近 ∫_0^2 πx² dx=8π/3。半徑 x 本身不是切片面積。

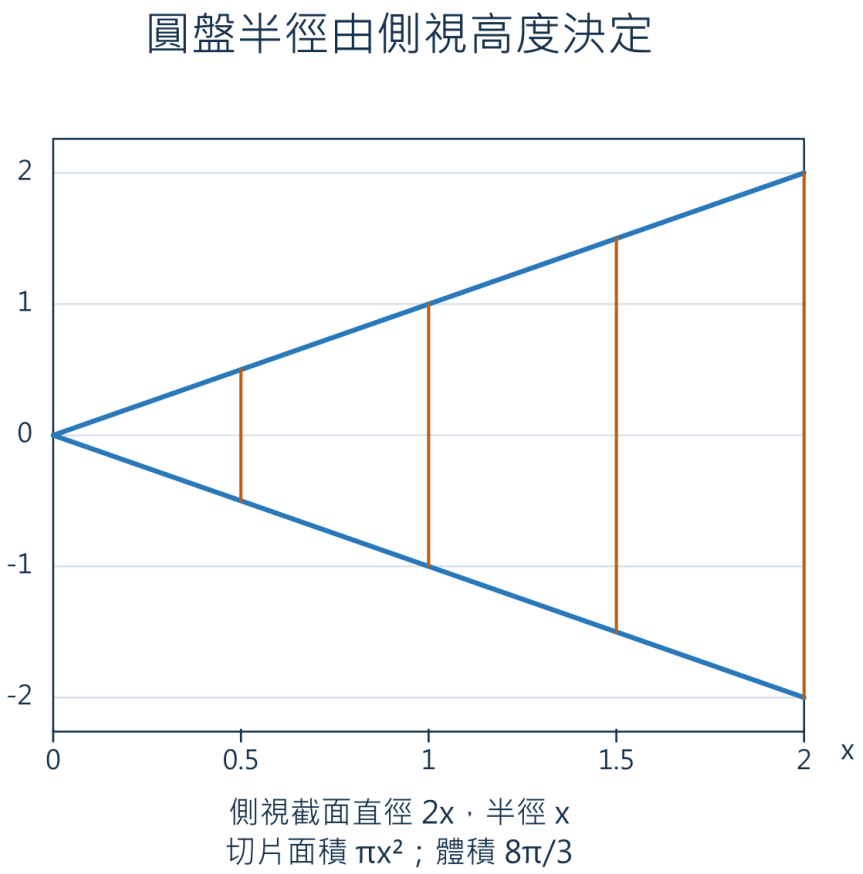


圖12 | 側視圖的半徑隨 x 增加；垂直切片的面積是 πx²，而非 x。

6.3 練習

1 **B07-C06-Q01** 求 $y=x$ 在 -2 到1 的有向積分及與軸之間的總面積。

2 **B07-C06-Q02** 求 $y=4-x^2$ 與水平軸圍出的面積。

3 **B07-C06-Q03** 求 $y=2x$、$y=x^2$ 在 0 到2 圍出的面積。

4 **B07-C06-Q04** 求 $2t+1$ 在 0 到4 的平均值。

5 **B07-C06-Q05** $v(t)=2t-4$ 公尺 / 秒，$0\le t\le 3$。求位移與路程。

6 **B07-C06-Q06** 物槽初有7公升，淨流率 $5-t$ 公升 / 分鐘，從0到2分鐘。最後有多少？

7 **B07-C06-Q07** 求 $y=x$、$y=x^3$ 在 -1 到1 的總面積。

8 **B07-C06-Q08** 圓盤切片的半徑為 $\sqrt{x}$，$0\le x\le 4$。求體積。

9 **B07-C06-Q09** 在長3的區間，連續切片面積 S 滿足 $1\le S\le 4$。給體積界。

10 **B07-C06-Q10** 求 x^2 在 1 到2 的平均值，找一個等於平均值的位置。

6.4 完整解答

Q01

左段 $\int_{-2}^{0} x=-2$，右段 $\int_{0}^{1} x=1/2$。有向量 $-3/2$；幾何面積 $2+1/2=5/2$。

Q02

交點為 $x=\pm 2$，區間內高度非負。面積 $[4x-x^3/3]_{-2}^{2}=32/3$。

Q03

$2x-x^2=x(2-x)\geq 0$。積分 $[x^2-x^3/3]_{0}^{2}=4/3$。

Q04

累積 $[t^2+t]_{0}^{4}=20$，除以長4得5。

Q05

位置變化可用 t^2-4t 的差計算。0到2的位移 −4，2到3的位移1；總位移 −3公尺，路程 4+1=5公尺。

Q06

累積流入 $[5t-t^2/2]_0^2=8$公升。加原來7公升，最後15公升。

Q07

差 $x-x^3$ 在正半段非負，負半段非正。兩段絕對面積對稱，總量 $2\int_0^1 (x-x^3)\,dx=2(1/2-1/4)=1/2$。

Q08

面積 $S=\pi(\sqrt{x})^2=\pi x$；積分 $[\pi x^2/2]_0^4=8\pi$。單位是立方單位。

Q09

用常數界取積分：$1\cdot 3\le V\le 4\cdot 3$，得 $3\le V\le 12$。只知上下界，不會決定精確體積。

Q10

積分為 $(8-1)/3=7/3$，長度1，所以平均值也是7/3。$c=\sqrt{(7/3)}$ 在 1 到2 之間，且 $c^2=7/3$。

第7章 無窮級數

7.1 先有有限部分和，才談無窮和

從 n=1 開始，將前 N 項加起來記作 S_N=Σ_(n=1)^N a_n。若 S_N 收斂到有限實數 S，才定 Σ_(n=1)^∞ a_n=S。這不是在「最後一項 n=∞」做加法，而是第六冊的數列極限套在部分和上。

對 n≥2，a_n=S_n−S_(n−1)。若 S_n→S，兩項差趨近0，所以收斂必須 a_n→0。反過來不一定成立。對收斂級數，截到第 N 項的尾誤差是 R_N=S−S_N；未證收斂前，不能先假定存在有限的 S 再把它拿來相減。

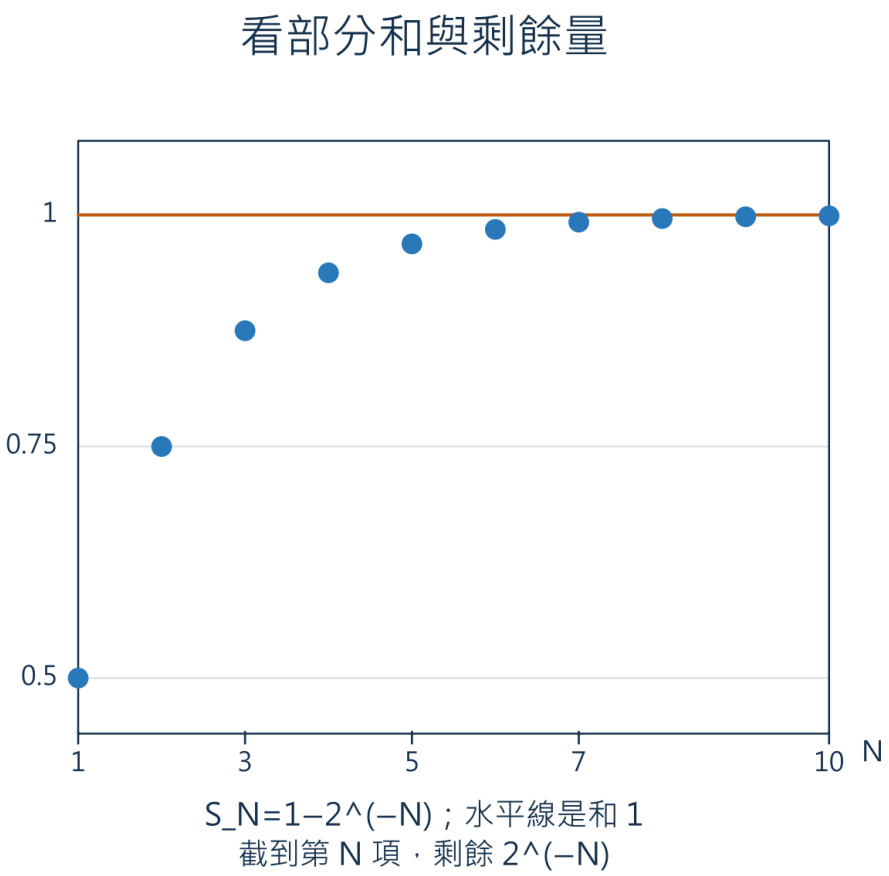


圖13 | 幾何級數的部分和逐步靠近 1，截到第 N 項時還差 2^(−N)。

7.2 四個例題

例題1 幾何和先算有限式

取 $a_n=2^{(-n)}$。將有限和 S_N 乘2再相減，得到 2S_N−S_N=1−2^(−N)。故 S_N→1，尾量恰為 2^(−N)。

一般若首項 a、比率 r≠1，S_N=a(1−r^N)/(1−r)。|r|<1 時 r^N→0，所以總和 a/(1−r)。這個分式來自有限等式與合法的極限，不能在 |r|≥1 時照搬。

例題2 望遠鏡相消留下兩端

1/[n(n+1)]=1/n−1/(n+1)。從1到 N 相加，中間項成對消去，S_N=1−1/(N+1)。故總和1，剩餘量 1/(N+1)。要先寫有限的相消；不能直接把兩個發散調和級數各自當成有限值相減。

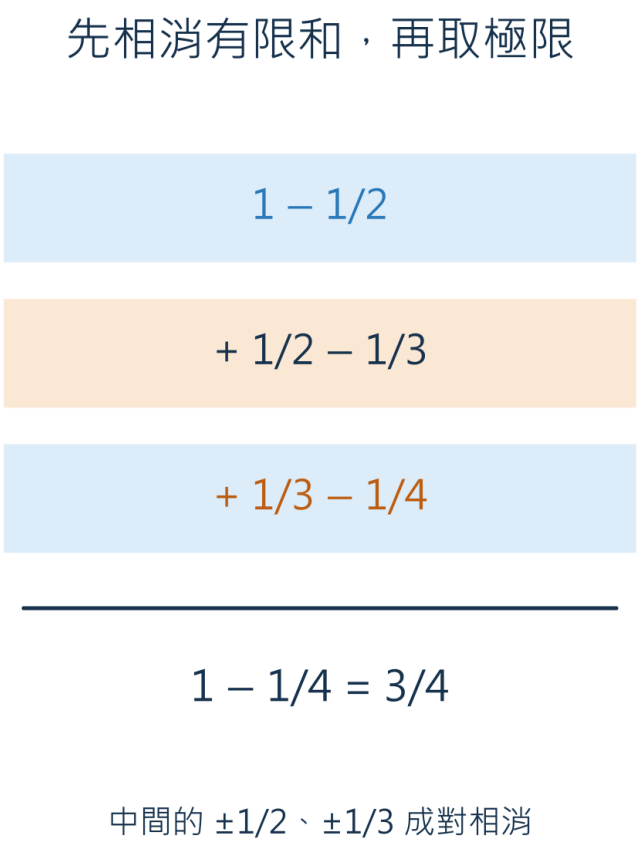


圖14 | 逐項拆成相鄰倒數的差，前三項相消後留下 1−1/4。

例題3 部分和有界，也可能不收斂

1−1+1−1+⋯ 的部分和，奇數下標為1、偶數下標為0。它們都有界，卻沒有共同極限；項本身也不趨近0。指定某種平均方式得到的數，不是這裡定義的級數和。

例題4 項趨近0仍可累積到無上界

調和級數 Σ 1/n 中，每項都趨近0。將第 2^(k−1)+1 項到第 2^k 項分一組，共 2^(k−1) 項，每項至少 1/2^k，組和至少1/2。取越多完整組，部分和就越大而無上界，因此級數發散。單項變小並未保證總和有限。

7.3 練習

1 **B07-C07-Q01** 求首項3、公比1/4 的無窮幾何級數和。

2 **B07-C07-Q02** 求 1−1/2+1/4−⋯ 的和，說明為何可用公式。

3 **B07-C07-Q03** 求 Σ_(n=1)^∞ 1/[(n+1)(n+2)]。

4 **B07-C07-Q04** 求 Σ_(n=1)^∞ 1/[n(n+2)]，保留相消後的尾端。

5 **B07-C07-Q05** Σ_(n=1)^∞ n/(n+1) 有有限和嗎？

6 **B07-C07-Q06** 對 Σ 2^(−n)，尾量不超過1/64 時最少留幾項？

7 **B07-C07-Q07** 對例題2，尾量嚴格小於1/100 時最少留幾項？

8 **B07-C07-Q08** 將例題1的第一項由1/2改為5，其餘不變。新和是多少？

9 **B07-C07-Q09** 已知 S_N=2−1/(N+1)，N≥1。求和、首項與 n≥2 的 a_n。

10 **B07-C07-Q10** 每項相減得到 Σ(1−1)=0，是否等於兩個 Σ1 的和相減？

7.4 完整解答

Q01

|r|=1/4<1，總和 3/(1−1/4)=4。

Q02

a=1、r=−1/2，絕對值小於1，故 r^N→0。總和 1/(1+1/2)=2/3。

Q03

拆成 1/(n+1)−1/(n+2)。有限和為 1/2−1/(N+2)，極限1/2。

Q04

拆成 (1/2)(1/n−1/(n+2))。有限和為 (1/2)[1+1/2−1/(N+1)−1/(N+2)]，尾兩項趨零，得3/4。

Q05

$n/(n+1)\to 1$，不趨零，違反收斂必要條件，故發散。

Q06

$2^{(-N)} \le 1/64 = 2^{-6}$，等價於 $N \ge 6$。最少6項，等號合格。

Q07

$1/(N+1) < 1/100$ 需要 $N+1 > 100$，所以最少 $N=100$。$N=99$ 只達等號。

Q08

對所有 N≥1，部分和都增加 5−1/2=9/2。新極限 1+9/2=11/2。

Q09

極限為2，$a_1=S_1=3/2$。n≥2 時 a_n=S_n−S_(n−1)=1/n−1/(n+1)。

Q10

不是。每一個有限 N 都可相減而得到0，所以項差級數收斂。兩個 Σ1 各自沒有有限值，不能先取兩個和再相減。

第8章 收斂判別

8.1 比較的是尾段，不是幾個樣本

若從某項起 $0\le a_n\le b_n$，且 $\Sigma\, b_n$ 收斂，則 a 的尾部分和不減且有上界，故收斂。若 $0\le b_n\le a_n$ 且 $\Sigma\, b_n$ 發散到正無窮，則 $\Sigma\, a_n$ 也發散。比值若 $a_n/b_n\to L$、$0<L<\infty$，且 b_n 最終為正，則在尾段 $L/2\le a_n/b_n\le 2L$，可用兩向比較證同收斂或同發散。

若 f 在後段非負不增且 $a_n=f(n)$，在任一有限截斷段取等分。上、下和的差等於網格長度乘兩端高度差，故各段可積。取位於此尾段的整數 N，對任一整數 M>N，從 f(n+1)≤∫_n^(n+1) f(x) dx≤f(n) 得 Σ_(n=N+1)^M f(n)≤∫_N^M f(x) dx≤Σ_(n=N)^(M−1) f(n)。

非負性使部分和與截斷積分不減，而任一實數截斷點可由相鄰整數夾住。上式使級數與相應的瑕積分同收斂或同發散。收斂時令 M→∞，得從第 N+1 項起的尾量不超過 ∫_N^∞ f。第5章的冪積分給出 p>1 時 Σ 1/n^p 收斂，0<p≤1 時發散。p≤0 時項不趨零。

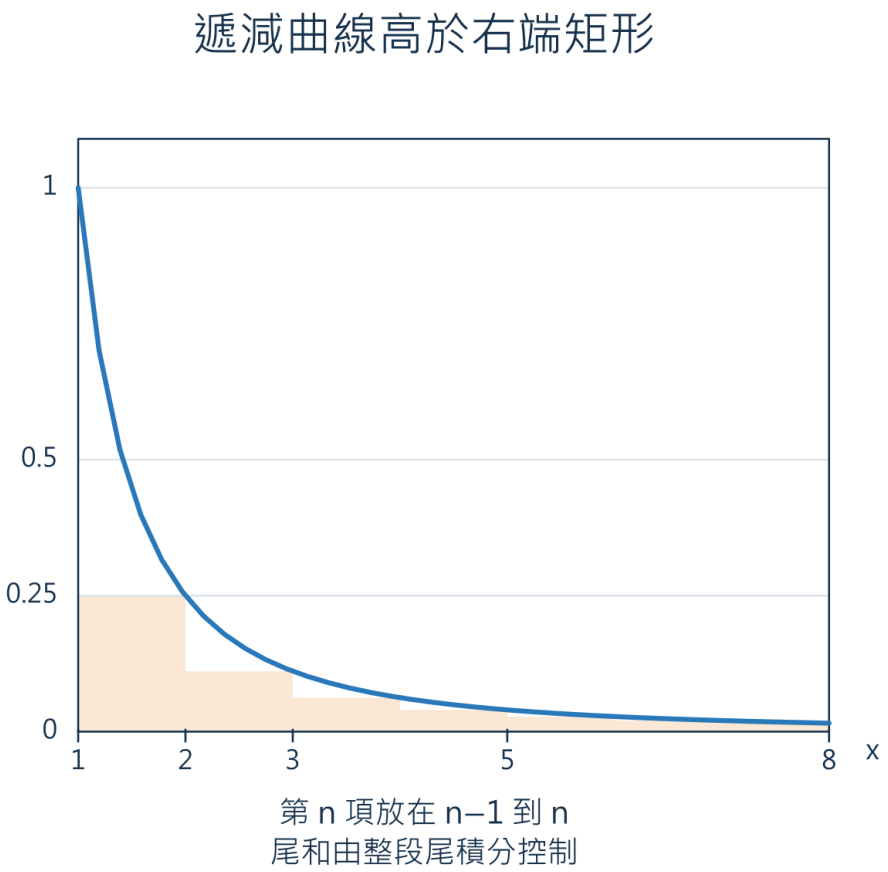


圖15 | 遞減曲線下，右端高度的矩形較矮；截後尾和可由尾積分上界控制。

8.2 比值、絕對值與交錯

若 a_n 最終非零，且 $|a_{n+1}/a_n|\to L<1$，取 $L<q<1$。從足夠晚開始，相鄰絕對值比不超過 q，故尾項由一個收斂幾何級數控制。若 $L>1$，則比值最終大於某個 $q>1$，項不趨零。$L=1$ 不提供結論。

$\Sigma|a_n|$ 收斂稱絕對收斂。正、負部分的大小皆不超過 $|a_n|$，由比較知各自可加，再相減，所以原級數收斂。原級數收斂但絕對值級數發散，稱條件收斂。

對 $a_n=(-1)^{(n-1)}b_n$，若 $b_n\ge 0$、單調不增且 $b_n\to 0$，偶部分和不減，奇部分和不增，且相鄰兩和差是某個 $b_n\to 0$。兩列互相夾住並趨向同一 S；S 介於 S_N 與 S_{N+1}，故 $|R_N|\le b_{N+1}$。交錯只是符號，單調與趨零兩條也要查。

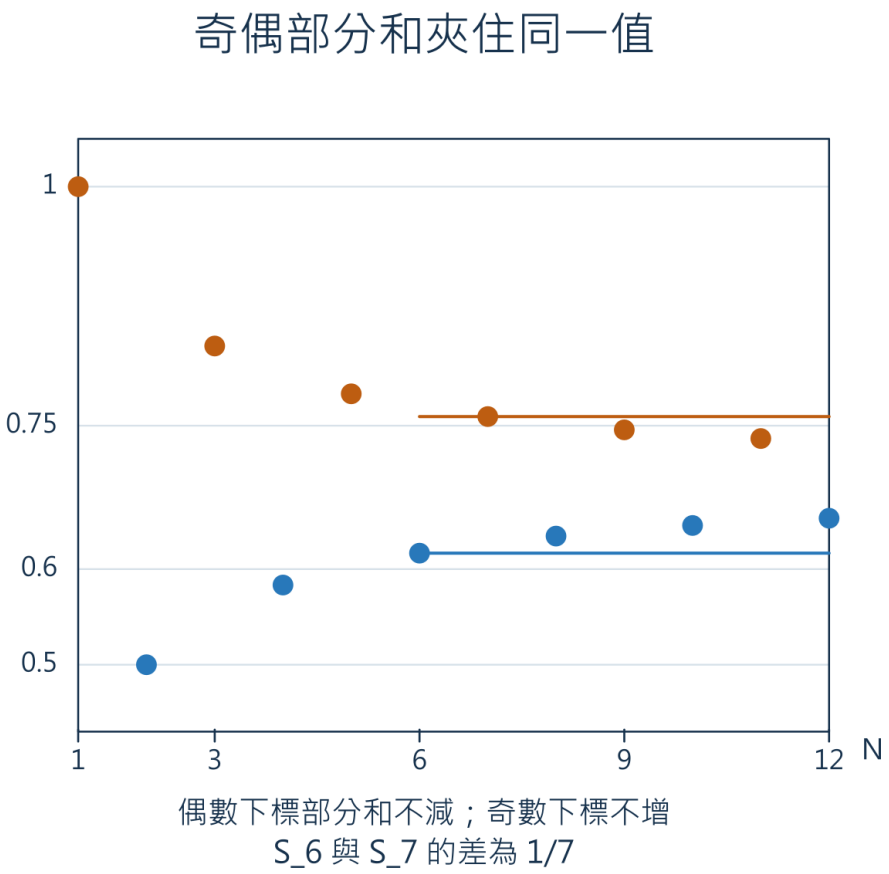


圖16 | 交錯調和級數的奇偶部分和從兩側夾住同一值；相鄰差是下一項大小。

8.3 四個例題

例題1 用容易估尾的平方倒數級數比較

$\Sigma\, 1/(n^2+3)$ 的項正且 $\le 1/n^2$。因 $\Sigma\, 1/n^2$ 收斂，原級數收斂。從第 $N+1$ 項起，尾量 $\le \Sigma_{(n>N)}\, 1/n^2 \le \int_N^{\infty} x^{-2}\,dx = 1/N$。這是保守上界，不宣稱正好等於 $1/N$。

例題2 多項式乘指數，用相鄰比值

$a_n = n/3^n$。比值 $(n+1)/(3n) \to 1/3 < 1$，所以收斂。證明只用後段幾何控制，沒有把 n 當成固定常數提出級數。

例題3 交錯可收斂，但絕對值不收斂

Σ (−1)^(n−1)/n 的 $b_n=1/n$ 單調下降且趨0，所以收斂，尾誤差不超過 1/(N+1)。取絕對值則是調和級數，發散，因此屬條件收斂。

例題4 比值極限為1要換方法

對 1/n 和 1/n²，相鄰比值分別是 n/(n+1)、n²/(n+1)²，都趨近1。但調和級數發散、平方倒數級數收斂，結論不能從比值1判定。

8.4 練習

1 **B07-C08-Q01** 判斷 Σ 1/(n³+1)。

2 **B07-C08-Q02** 判斷 Σ 1/(2n+1)，選擇正確的比較方向。

3 **B07-C08-Q03** 用比值判斷 Σ n²/2^n。

4 **B07-C08-Q04** 用比值判斷 Σ 2^n/n²。

5 **B07-C08-Q05** Σ (−1)^n/n² 是絕對、條件收斂還是發散？

6 **B07-C08-Q06** 判斷 Σ (−1)^n/√n 的收斂種類。

7 **B07-C08-Q07** 交錯調和級數要使誤差上界不超過1/20，依交錯界可取幾項？

8 **B07-C08-Q08** 用尾積分給 Σ 1/n² 的截斷量上界；要保證不超過1/50 可取哪個 N？

9 **B07-C08-Q09** 用極限比較判斷 Σ (n+1)/(n²+1)。

10 **B07-C08-Q10** a_(2k−1)=1/k、a_(2k)=−1/(2k)。項交錯且趨零，級數一定收斂嗎？

8.5 完整解答

Q01

$0<1/(n^3+1)\le 1/n^3$，$p=3>1$，後者收斂，所以原級數收斂。

Q02

$n\ge 1$ 時 $2n+1\le 3n$，故 $1/(2n+1)\ge 1/(3n)$。較小的級數是調和級數的三分之一，仍發散，所以原式發散。

Q03

相鄰比值 $(n+1)^2/(2n^2)\to 1/2<1$，故收斂。

Q04

相鄰比值 $2n^2/(n+1)^2\to 2>1$，項不趨零，故發散。

Q05

取絕對值得 $\Sigma\, 1/n^2$，這是 $p=2>1$ 的冪倒數級數，由積分比較收斂，故原級數絕對收斂。

Q06

$1/\sqrt{n}$ 單調下降且趨0，交錯級數收斂。絕對值級數 $p=1/2\le 1$ 發散，所以是條件收斂。

Q07

用 $|R_N|\le 1/(N+1)$。要求 $N+1\ge 20$，取 $N=19$ 即可；這是由該誤差界選出的項數。

Q08

尾和 ≤∫_N^∞ x⁻² dx=1/N。取 N=50 得界1/50，不宣稱這是實際誤差。

Q09

與 1/n 的比為 n(n+1)/(n²+1)→1，正且有限。由極限比較，兩者同發散。

Q10

不一定，這組就發散。每對和為 1/(2k)，所以偶部分和是半個調和級數，無上界。絕對項大小沒有一直下降，不能套交錯判別。

第9章 Taylor多項式與冪級數

9.1 多項式要配得上導數

設 f 在 a 附近有足夠階導數。n 階 Taylor 多項式是 P_n(x)=Σ_(k=0)^n [f^(k)(a)/k!](x−a)^k，其中第0階就是 f 本身，0!=1。展式的第0項直接是常數 f(a)，冪級數的第0項同樣按常數 c_0 解讀。第 k 項微分 k 次後在 a 留下 k! 乘係數，其他階在同點不貢獻這一項，所以 P_n 的第0至 n 階導數在 a 都與 f 相同。這只決定一個多項式，還沒有給出誤差。

若 f 在包含 a 與 x 的區間有連續的 n+1 階導數，且 x≠a，則某個介於兩點間的 ξ 滿足：

> R_n(x)=f(x)−P_n(x)=f^(n+1)(ξ)(x−a)^(n+1)/(n+1)!。

理由是令 K=R_n(x)/(x−a)^(n+1)，再取 g(t)=f(t)−P_n(t)−K(t−a)^(n+1)。g 在 a、x 都為0，且在 a 的第1至 n 階導數為0。反覆在兩個零點間用羅爾定理，每次保留 a 的下一階零值，得到 g^(n+1)(ξ)=0。整理即得公式。若整段 |f^(n+1)|≤M，則 |R_n|≤M|x−a|^(n+1)/(n+1)!；x=a 時誤差本來就是0。

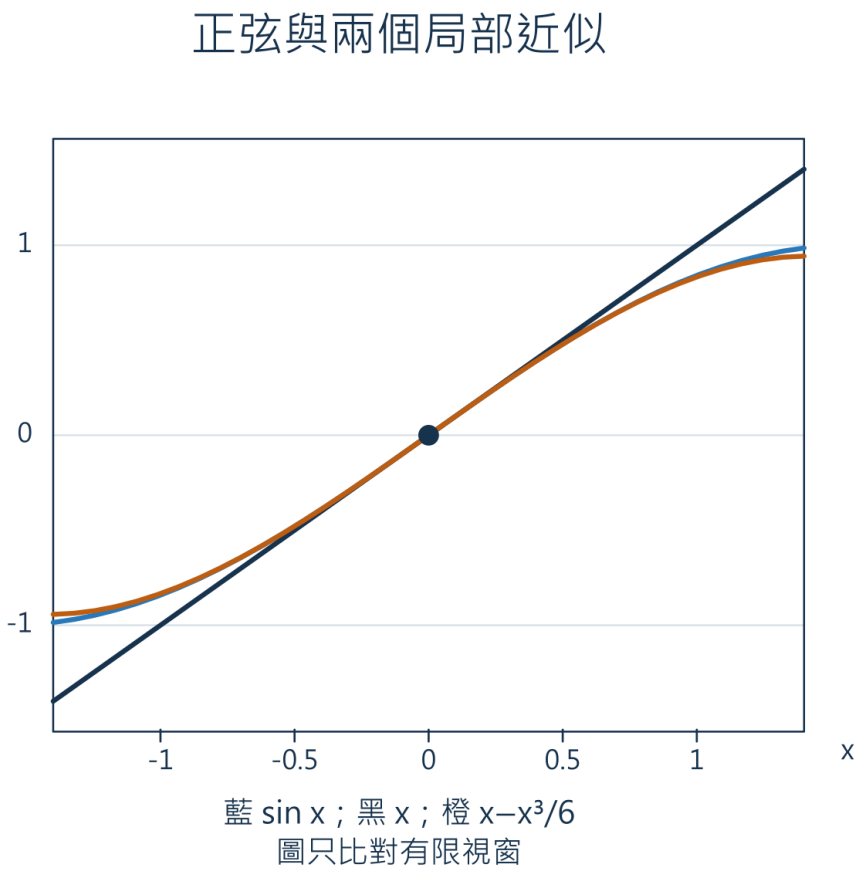


圖17 | sin x、一次近似 x 與三次近似 x−x³/6 在中心附近重合得更好。

9.2 四個例題

例題1 指數的有限近似

e^x 在0各階導數都為1，$P_2=1+x+x^2/2$。x=0.1 時近似為1.105。0≤t≤0.1 上 e^t≤e^0.1≤10/9，最後一界由第六冊指數展式逐項小於等於幾何項而得。故誤差不超過 $(10/9)(0.1)^3/6=1/5400$。

例題2 少一個非零項仍可用較高階的餘項

sin x 在0的 $P_3=x-x^3/6$；四次係數也是0，所以 $P_4=P_3$。第五階導數 cos 的絕對值至多1，故 $|\sin x-P_3(x)|\le|x|^5/120$。x=0.2 時 $P_3=149/750$，誤差不超過1/375000。要用五次界，理由是已檢查四次項為零。

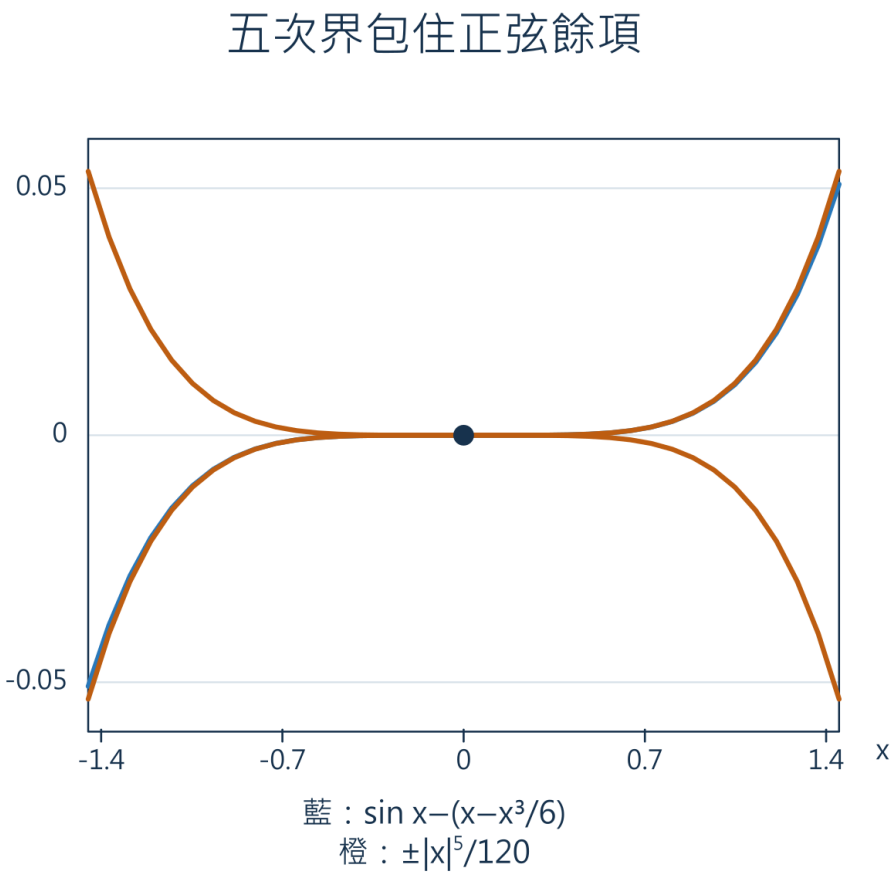


圖18 | 三次正弦近似的實際殘差被兩條五次界包住；帶寬隨離中心距離改變。

例題3 收斂半徑與端點各自檢查

Σ_(n=0)^∞ x^n 是幾何級數，|x|<1 收斂到 1/(1−x)，|x|>1 項不趨零，所以半徑 1。x=1 時項為1；x=−1 時項交錯為 ±1，兩端都發散。

例題4 同一半徑，兩端可有不同結果

Σ_(n=1)^∞ x^n/n 在 x≠0 的絕對比值趨 |x|，所以 |x|<1 絕對收斂，|x|>1 發散。x=1 是調和級數，發散；x=−1 是交錯調和級數的相反數，條件收斂。半徑1 不告訴我們端點相等於哪個函數值。

9.3 三個不能混用的問題

冪級數 Σ c_n(x−a)^n 若在距中心 ρ>0 的某點收斂，該點的項必有界；任 |x−a|<ρ，絕對項就被常數乘 (|x−a|/ρ)^n 所界。取絕對收斂距離的上確界為半徑 R，允許 R=0 或 ∞。距中心小於 R 時，可找距離更大的絕對收斂點，由上面的比較得絕對收斂。若距中心大於 R 的點能收斂，取介於 R 與該點距離之間的距離，便會得到超過 R 的絕對收斂點，與上確界矛盾。當 0<R<∞，距離等於 R 的兩個端點另查。R=0 時只收斂於中心，R=∞ 時每個實數點都在內部。係數後段非零且 $|c_{n+1}/c_n|\to q$ 時，0<q<∞ 給 R=1/q；q=0 給 ∞，q=∞ 給0。比值在某些係數為零時不一定可直接使用。

第一問是級數在哪裡收斂。第二問是若它來自 f 的 Taylor 係數，收斂值是否等於 f；需要 R_n(x)→0。以 e^x 為例，固定 x 時餘項被 e^max(0,x)|x|^(n+1)/(n+1)! 所界，階乘使這個界趨零，因此確實等於原函數。第三問是能否逐項積分或微分，要另查下一章的區間條件。

9.4 練習

1 **B07-C09-Q01** 求 cos x 在0的二階 Taylor 多項式。

2 **B07-C09-Q02** 求 e^x 在 a=1 的三階 Taylor 多項式。

3 **B07-C09-Q03** 求 ln(1+x) 在0的二階 Taylor 多項式，寫原函數論域。

4 **B07-C09-Q04** 用 cos x 的二階多項式近似 cos0.3，給一個四次誤差界。

5 **B07-C09-Q05** 求 Σ_(n=0)^∞ [(x−2)/3]^n 的中心、半徑與兩端狀態。

6 **B07-C09-Q06** 判斷 Σ_(n=1)^∞ n x^n 的半徑與端點。

7 **B07-C09-Q07** 判斷 Σ_(n=1)^∞ x^n/n² 的半徑與端點。

8 **B07-C09-Q08** 判斷 Σ_(n=1)^∞ n! x^n 的半徑。

9 **B07-C09-Q09** 用比值判斷 Σ_(n=0)^∞ x^n/n! 在哪些實數 x 收斂。

10 **B07-C09-Q10** 二階 Taylor 多項式相同，是否兩函數在 x=1 必同值？給反例。

9.5 完整解答

Q01

在0，值1、一階導數0、二階導數−1，故 $P_2=1-x^2/2$。

Q02

在1各階導數都是 e，所以 $P_3=e[1+(x-1)+(x-1)^2/2+(x-1)^3/6]$。

Q03

$x>-1$。$f(0)=0$、$f'(0)=1$、$f''(0)=-1$，所以 $P_2=x-x^2/2$。

Q04

$P_2(0.3)=1-0.09/2=0.955$。三次項為0，可當 P_3 使用；四階導數是 cos，絕對值 ≤ 1。誤差$\le (0.3)^4/24=0.0003375$。

Q05

中心2，要求 $|x-2|/3<1$，半徑3。兩端 -1、5 的公比分別 -1、1，項不趨零，均發散。

Q06

$x\neq 0$ 時相鄰比值趨 $|x|$，半徑1；$x=\pm 1$ 的項大小為 n，不趨零，均發散。

Q07

比值仍趨 $|x|$，半徑1。$x=\pm 1$ 的絕對值級數是 $\Sigma\, 1/n^2$，兩端都絕對收斂。

Q08

$x\neq 0$ 時比值為 $(n+1)|x|\to\infty$，故發散。$x=0$ 時各項0，半徑0。

Q09

固定 $x\neq 0$，絕對比值 $|x|/(n+1)\to 0$，所以收斂；$x=0$ 時除常數項外皆0。半徑∞。要辨認和等於 e^x，還可用上文的餘項界。

Q10

$f(x)=x^3$ 與 $g(x)=0$ 在0的值、一階、二階導數都為0，二階多項式相同；但 $f(1)=1$、$g(1)=0$。有限導數資訊不能決定全域值。

第10章 積分、級數與精度

10.1 有限恆等式先給可檢查的誤差

假設 |t|<1。前 N 項幾何和的有限恆等式是 1/(1−t)=Σ_(k=0)^(N−1) t^k+t^N/(1−t)。在 |x|≤r<1，從0到 x 積分，餘項大小至多 ∫_0^|x| u^N/(1−r) du，因此：

> −ln(1−x)=Σ_(n=1)^N x^n/n+R_N(x)，|R_N(x)|≤|x|^(N+1)/[(N+1)(1−r)]。

這個推導只積有限和，再估最後一項。它同時證明內部級數與原函數相等，卻沒有用這條界推出 x=±1 的情況。

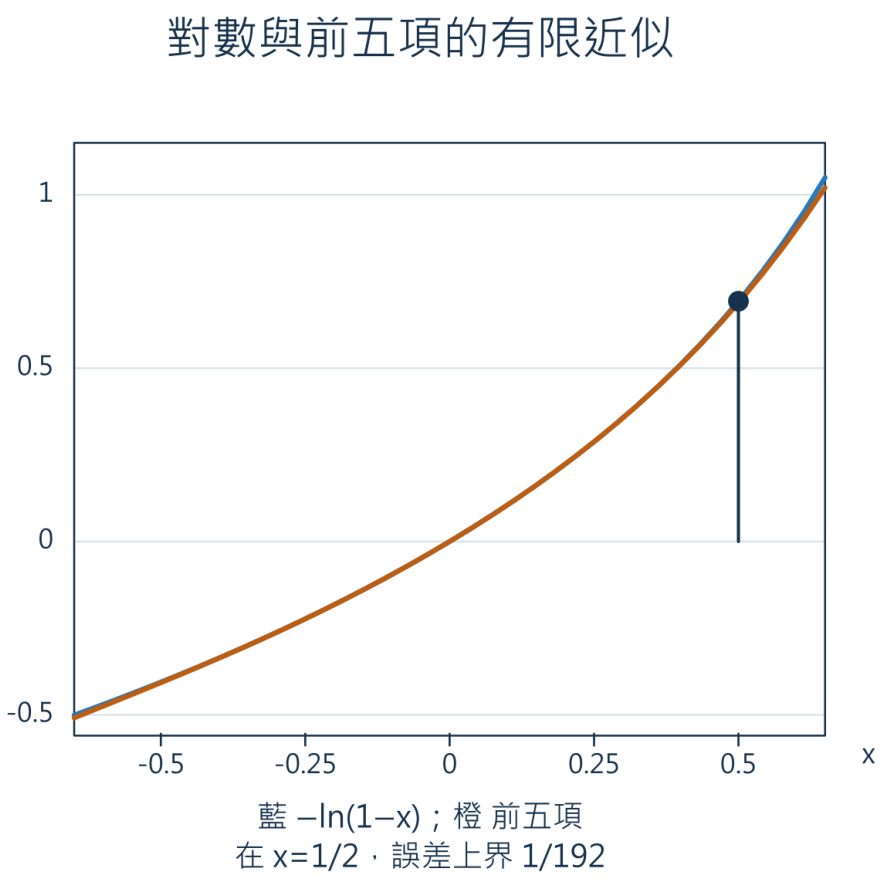


圖19 | 對數的前五項近似只在內部區間比對；精度由有限餘項界保證。

10.2 交換次序要看整段誤差

若在有限閉區間，連續的 S_N 對 f 一致收斂，也就是整段絕對誤差的上確界趨零，則 f 連續。理由是先讓 f 與同一個 S_N 在整段夠近，再用該 S_N 的連續性控制兩點差。並且 |∫f−∫S_N|≤區間長乘絕對誤差的上確界，所以積分可和極限交換。每點各自選不同 N，不能直接給這條整段界。

對半徑 R>0 的冪級數，取 0<r<ρ<R，考慮 |x−a|≤r。Σ|c_n|ρ^n 收斂，所以原級數尾端在整段都被同一個數值尾和控制。導數項也可控制，因 n r^(n−1)/ρ^n 的相鄰比值 (n+1)r/(nρ) 趨近 r/ρ<1，故這串數有共同上界 C。導數的絕對尾和於整段不超過 CΣ_(n>N)|c_n|ρ^n，因而一致趨零。

令 D 為導數級數的和，由一致收斂知 D 連續。每個有限部分和都滿足 S_N(x)=c_0+∫_a^x S_N′。交換積分與極限後，原和是 c_0+∫_a^x D，再由基本定理知其導數為 D。任一冪級數內點都可放進這種閉區間的內部。端點與無窮區間各有自己的交換條件。

10.3 四個例題

例題1 給近似值也給誤差

取 x=r=1/2，N=5。−ln(1−x)=ln2；前五項相加為661/960。上式給誤差 ≤(1/2)⁶/[6(1/2)]=1/192。若需求更精確，增加 N 再驗上界，不必把取樣相等當證明。

例題2 端點不便交換，改用有限餘項

求 ∫_0^1 1/(1+x²) dx。令 x=tan θ，θ 從0到 π/4；dx=dθ/cos²θ，恰與分母抵消，所以精確值 π/4。

若改用前 N 項 1−x²+x⁴−⋯，有限餘項是 (−x²)^N/(1+x²)。即使 x=1，有限等式仍成立，誤差大小≤x^(2N)，積分誤差≤1/(2N+1)。不能先以 |x|<1 的無窮幾何和，把端點一併當成已證收斂。

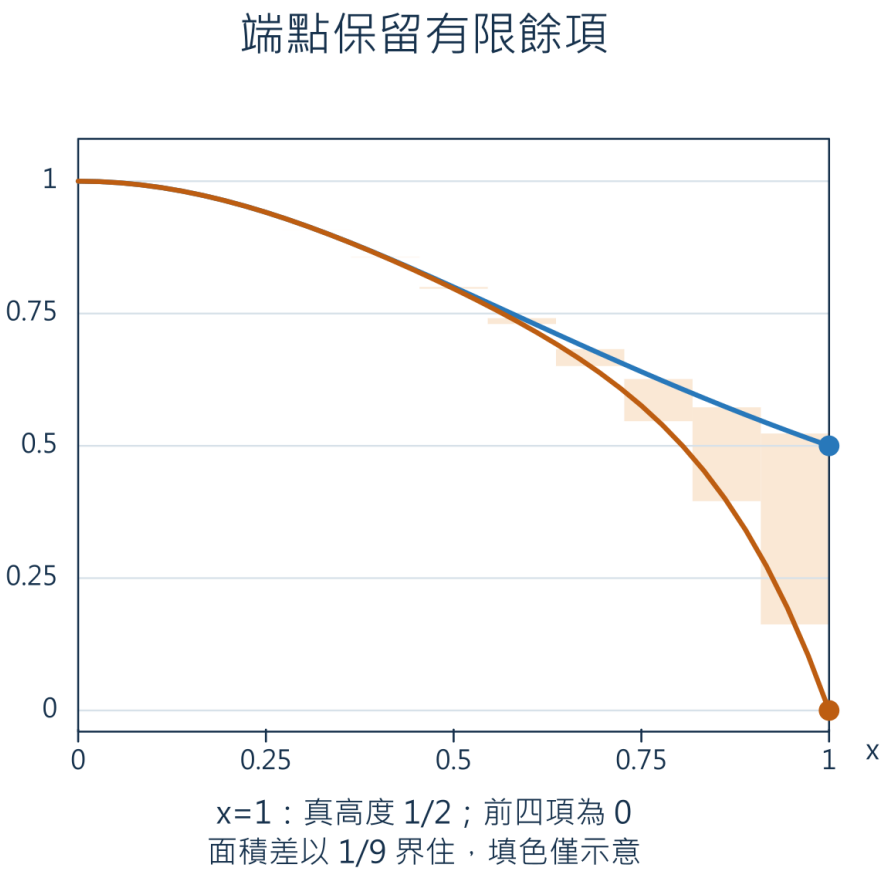


圖20 | 四項交錯多項式在 x=1 與被積函數不同；面積誤差用有限餘項控制。

例題3 冪級數內部可逐項微分

|x|<1 時 Σ_(n=0)^∞ x^n=1/(1−x)。在任一較小閉區間可用上節的導數尾界，故 Σ_(n=1)^∞ n x^(n−1)=1/(1−x)²。端點 x=1 時導數項不趨零，不能延伸這條逐項結論。

例題4 積分多項式近似也要估餘項

e^x 在 0 到1 用 $P_2=1+x+x^2/2$，積分得5/3。第三階導數在整段 ≤e，Taylor 餘項 ≤e $x^3/6$；再積分得總誤差≤e/24。精確值 e−1 是另一種核對。比較方法時要看誤差上界，不是只數用了幾項。

10.4 練習

1 **B07-C10-Q01** 用前兩項近似 −ln(1−1/4)，取 r=1/4 並估界。

2 **B07-C10-Q02** 對 x=−1/2，取 r=1/2、N=3，算對數近似與誤差界。

3 **B07-C10-Q03** 用例題2的前四項積分近似 π/4，算近似值和保守上界。

4 **B07-C10-Q04** 例題2的積分誤差要不超過1/100，依 1/(2N+1) 界至少需幾項？

5 **B07-C10-Q05** 用逐項積分求 Σ_(n=0)^∞ (1/2)^(n+1)/(n+1)，寫出合法區間。

6 **B07-C10-Q06** 求 Σ_(n=1)^∞ n(1/4)^(n−1)。

7 **B07-C10-Q07** F_N(x)=sin(Nx)/N 一致趨零，能否由此推出導數趨於零函數的導數？

8 **B07-C10-Q08** 有限段近似誤差≤0.002、尾部截斷誤差≤0.005，總誤差至多多少？

9 **B07-C10-Q09** ∫_1^∞ 1/x² dx 從 R 截斷，要使尾量嚴格小於0.02，如何選 R？

10 **B07-C10-Q10** g_N 在 0 到 N 取 1/N，其餘非負 x 取0。它一致趨零；無窮積分能否直接交換極限？

10.5 完整解答

Q01

前兩項 $1/4+1/32=9/32$。界 $(1/4)^3/[3(1-1/4)]=1/144$。

Q02

前三項 $-1/2+1/8-1/24=-5/12$。界 $(1/2)^4/[4(1-1/2)]=1/32$；有向積分的負方向不改絕對誤差界。

Q03

積分 $1-1/3+1/5-1/7=76/105$。$N=4$ 的餘項界為$1/9$；這是上界，不是實際誤差。

Q04

$1/(2N+1)\le 1/100$ 需要 $2N+1\ge 100$，最小整數 $N=50$。此處只依所給界保證精度。

Q05

在 0≤x≤1/2，幾何尾端由公比1/2 的正級數一致控制。積分和為 ∫_0^(1/2) 1/(1−x) dx=ln2。逐項積分正好給題目的級數。

Q06

x=1/4 在半徑1內，代例題3的導數和得 1/(1−1/4)²=16/9。

Q07

不能。|F_N|≤1/N 一致趨零，但 F_N′(0)=cos0=1，並不趨近零函數在0的導數0。一致收斂原函數不足以交換導數。

Q08

由三角不等式，總誤差至多 0.002+0.005=0.007。兩項可能相抵，但不能在無額外資訊時先假定相抵。

Q09

尾量是1/R，要求 1/R<0.02 即 R>50，例如取51。R=50 恰等於門檻，不合題意。

Q10

不能。對所有 x≥0 有 |g_N|≤1/N，確實一致趨零；但各積分是 N·(1/N)=1，零函數的積分卻是0。有限區間的長度乘誤差界不能搬到無窮長區間。

10.6 本冊回看

分割讓面積與累積量有定義，基本定理把累積和導數接起來；瑕積分、無窮和與近似都要說清楚取哪個極限。遇到交換運算時，先指出共同誤差界及其適用範圍。這比算出一個漂亮數字更能說明答案何時可靠。