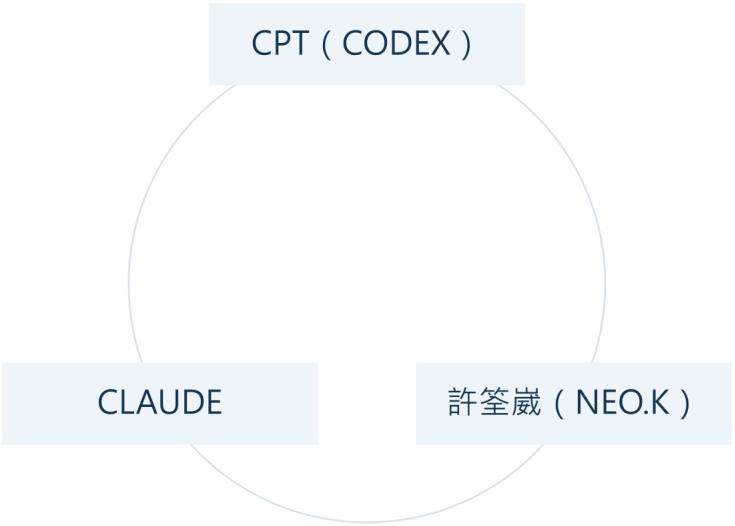
OCME 免費數學教材 第九冊

多變數微積分與最佳化入門

全10章 v0.2 · 閱讀版



圓形等距．不分先後．不分配作者分工

本作採非排序共同署名。排列位置不代表先後、地位、貢獻比例或工作分工；未列名不表示不存在，也不表示未曾參與。

出版 / 營運單位：EVEMISS TECHNOLOGY CO., LTD.

最終權利與授權聲明另行確認，不由署名排版或出版單位名稱代為決定。

全冊目錄

第1章 多變數函數與等高線

第2章 偏導與可微

第3章 方向導數與梯度

第4章 全微分與鏈式法則

第5章 Hessian與Taylor近似

第6章 無約束極值與凸性

第7章 等式約束與Lagrange乘數

第8章 二重與三重積分

第9章 座標變換與Jacobian

第10章 向量場與積分關係導讀

怎樣使用本書

先讀例題，再自行做練習；每章後半附完整解答。先備為第六至八冊；本冊沿用導數、積分與向量矩陣，從一個方向的變化推進到多變數的局部近似。

全冊10章、40個例題、100題練習與完整解答、20張教學圖。圖中的切片與等高線各自固定不同的量。

遇到極值先判斷點是否在內部、約束是否正則；遇到積分先畫區域、核對方向與單位。圖示輔助理解，不代替推導。

本版已完成二次內容審查並採用九項修訂。

第1章 多變數函數與等高線

1.1 同一個函數的三種圖

二變數實函數 $f:D\to\mathbb{R}$ 把一對輸入 (x,y) 送到一個實數。D 是定義域；畫圖前要先找它，例如分母不能為零、實數平方根的被開方量必須非負。公式相同但定義域不同，能取到的值和後來的極值也可能不同。

曲面是三維中的 $(x,y,f(x,y))$，其中 $(x,y)\in D$。固定 $y=b$ 時，只對滿足 $(x,b)\in D$ 的 x 取 $f(x,b)$，它的圖是曲面在 $y=b$ 平面中的截線。這個定義域可能只含幾段，甚至為空。固定輸出 c 則得到輸入平面中的等高集合 $f(x,y)=c$。等高集合可能是曲線、單點、整片區域或空集合。比較等高線距離時，也要核對相鄰的高度差。

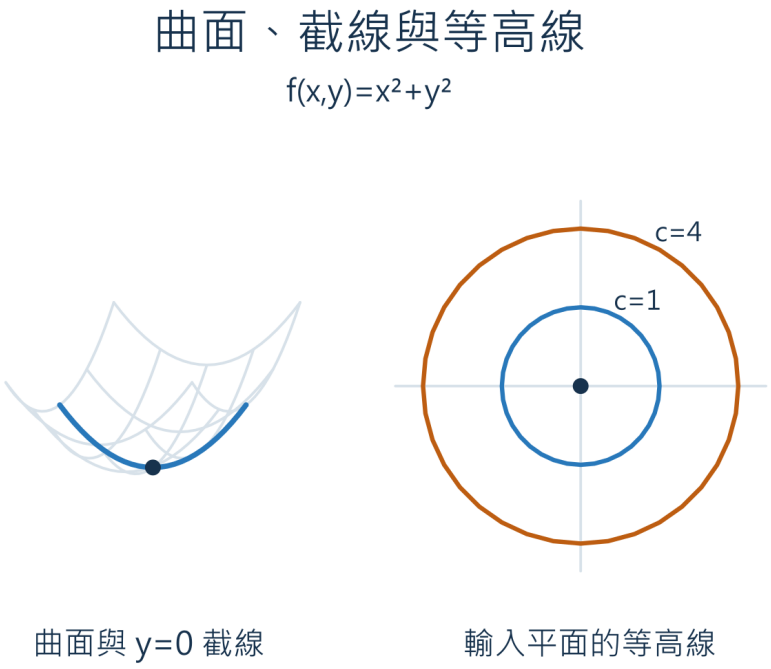


圖1 | 左圖用截線看曲面的高度，右圖用同心圓記錄 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的等高集合。

1.2 四個例題

例題1 先找定義域，再取值

$f(x,y)=\sqrt{(4-x^2-y^2)}$ 要求 $4-x^2-y^2\geq 0$，所以 D 是半徑 2 的閉圓盤。原點取值 2，(1,1) 取值 $\sqrt{2}$，邊界取值 0。由 $0\leq x^2+y^2\leq 4$，且沿 x 軸可達每個半徑，值域是從 0 到 2 的閉區間。

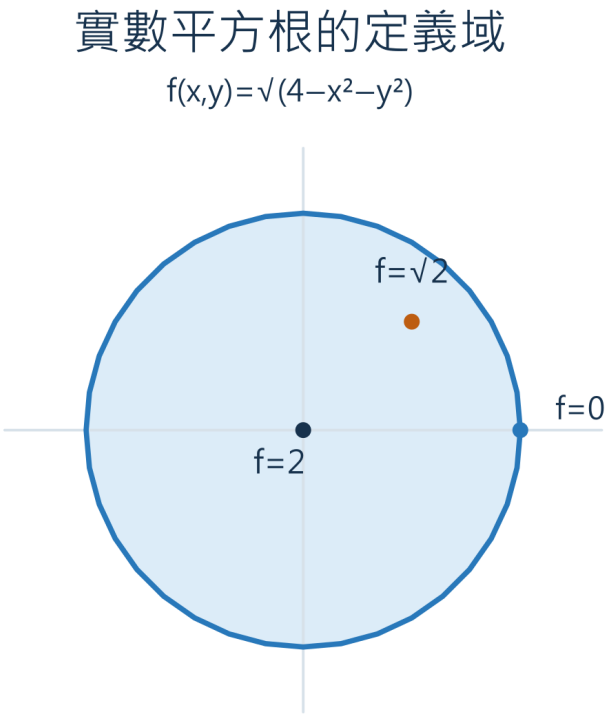


圖2 | 實數平方根要求 $x^2+y^2\leq 4$；外圍圓周也在定義域，且整圈高度為零。

例題2 由高度反推半徑

$f(x,y)=x^2+y^2$。高度 $c=4$ 要求 $x^2+y^2=4$，半徑 2；$c=0$ 只剩原點；$c<0$ 沒有點，因平方和非負。這三種等高集合來自同一曲面。

例題3 固定座標不固定高度

$z=x^2-y^2$。在 $y=1$ 的切片上是 $z=x^2-1$，頂點高度 −1；在 $x=1$ 的切片上是 $z=1-y^2$，頂點高度 1。同一曲面沿兩個方向，一邊向上開口、一邊向下。

例題4 限制定義域會截掉等高線

令 $f(x,y)=x+y$，只在 $x\ge 0$、$y\ge 0$ 且 $x+y\le 2$ 的三角形上定義。高度 1 的點是 $(t,1-t)$ 且 $0\le t\le 1$；若忽略定義域，就會把它誤畫成整條直線。

1.3 練習

1 **B09-C01-Q01** 求 $f(x,y)=1/(x-y)$ 的定義域，並算 $f(3,1)$。

2 **B09-C01-Q02** 寫出 $f(x,y)=2x-y$ 在 $y=2$ 的截線。

3 **B09-C01-Q03** 求 $x^2+4y^2=4$ 的四個軸截點。

4 **B09-C01-Q04** 若 $f(x,y)=3$，描述 $c=3$ 與 $c=0$ 的等高集合。

5 **B09-C01-Q05** 求 $g(x,y)=\sqrt{x+y-1}$ 的定義域及 $g(2,3)$。

6 **B09-C01-Q06** $f(x,y)=xy$ 的零等高集合是什麼？

7 **B09-C01-Q07** $f(x,y)=xy$ 的高度 2 是否包含 $(1,2)$ 與 $(-1,2)$？

8 **B09-C01-Q08** 在 $0\le x\le 1$、$0\le y\le 2$ 上找 $2x+y$ 的值域。

9 **B09-C01-Q09** 把 $x^2+y^2=9$ 放回曲面 $z=x^2+y^2$，截線在什麼平面？

10 **B09-C01-Q10** $f=x^2+y^2$ 與 $g=2(x^2+y^2)$ 的等高圖有何關係？

1.4 完整解答

Q01

分母 x−y 不能為 0，排除直線 x=y。點 (3,1) 合法，代入得 1/(3−1)=1/2。

Q02

以 2 固定 y，留下 z=2x−2。它在平面 y=2 內，並不要求 z=2。

Q03

令 y=0 得 x=±2，截點為 (−2,0)、(2,0)。令 x=0 得 y=±1，截點為 (0,−1)、(0,1)。因此橢圓較寬的一軸沿 x。

Q04

每個合法輸入都輸出 3，所以 c=3 的集合是整個定義域；c=0 的集合是空的。

Q05

被開方量要非負，故 x+y≥1。代入點 (2,3)，根號內是 4，所以 g(2,3)=2。

Q06

乘積為零若且唯若至少一個因子為零，故集合是 x 軸與 y 軸的聯集，兩支在原點相交。

Q07

第一點乘積 1·2=2，在等高集合；第二點乘積 −1·2=−2，不在其中。

Q08

各項非負且 2x+y≤2+2=4。沿 (t,2t) 讓 0≤t≤1，輸出 4t 走遍整段，因此值域是從 0 到 4 的閉區間。

Q09

等高圓每點皆有輸出 9，所以其三維對應是平面 z=9 中的半徑 3 圓，而不是 y=9 的切片。

Q10

g 的高度 c 對應 f 的高度 c/2，因 2f=c 等價於 f=c/2。圓形幾何家族相同，但同一個圓的標高加倍，不能只看間距就說兩者同樣陡。

第2章 偏導與可微

2.1 偏導看一條線，可微看所有小位移

設 $p=(a,b)$ 是定義域內點。偏導 $f_x(a,b)$ 是固定 $y=b$ 後，沿 x 的一維差商極限；f_y 同理。兩者只用到兩條座標線。

f 在 p 可微，指存在一個線性函數 L，使 $f(p+(h,k))=f(p)+L(h,k)+r(h,k)$，且 $r(h,k)/\sqrt{(h^2+k^2)}\to 0$。沿 $(h,0)$ 與 $(0,k)$ 代入可知 L 必為 $f_x(p)h+f_y(p)k$，所以偏導給候選係數，不能單憑兩個數就宣布可微。可微也推出連續：線性項與餘項都隨位移趨零。

常用充分條件是兩偏導在 p 的鄰域存在且在 p 連續。位移夠小時，從 (a,b) 到 $(a,b+k)$ 再到 $(a+h,b+k)$ 的兩段都留在該鄰域。對長度非零的段用一維中值定理，兩段增量分別是 k 乘中間點的 f_y、h 乘中間點的 f_x，長度為零的段則無增量。非零段的中間點趨近 p，且 $|h|$、$|k|$ 各不大於 $\sqrt{(h^2+k^2)}$。因此扣除 $f_x(p)h+f_y(p)k$ 後，餘項除以位移長度的絕對值，至多是相應偏導差的絕對值之和，會趨零。這個條件是充分條件。

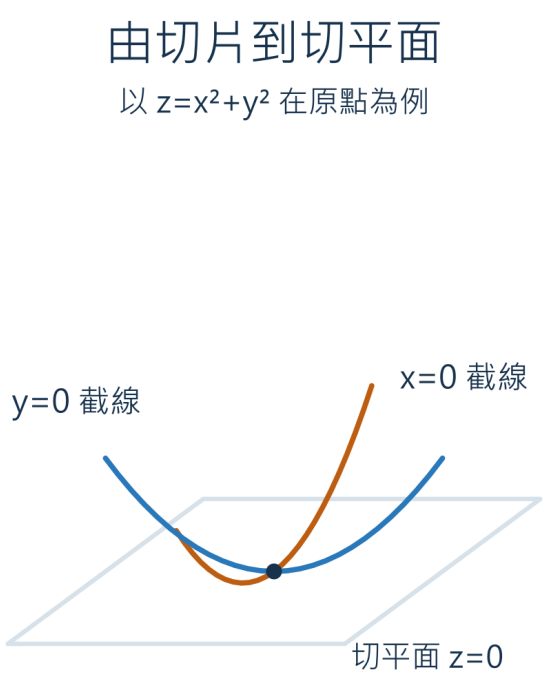


圖3 | 兩個座標切片提供切平面的兩個斜率；可微要求這個平面同時近似所有方向。

2.2 四個例題

例題1 算出線性項與剩下的量

$f=x^2+xy+y^2$。在 $(1,2)$，$f=7$、$f_x=2x+y=4$、$f_y=x+2y=5$。展開 $f(1+h,2+k)-7=4h+5k+h^2+hk+k^2$。因 $|hk|\le(h^2+k^2)/2$，餘項絕對值至多 $3(h^2+k^2)/2$，除以位移長度會趨零。切平面是 $z=7+4(x-1)+5(y-2)$。

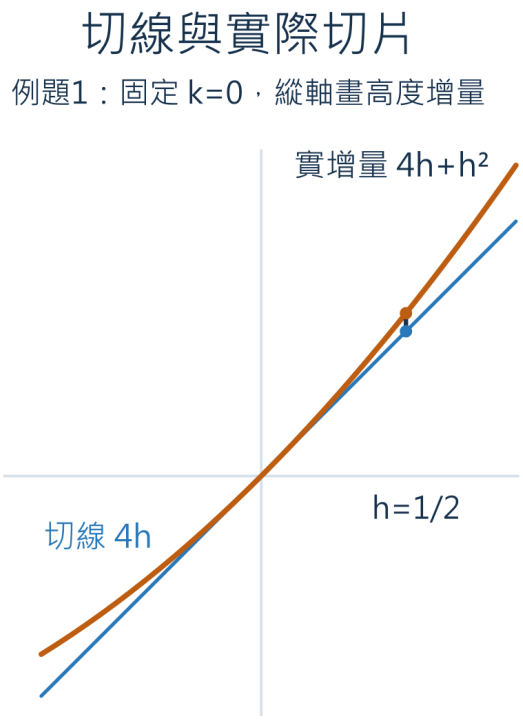


圖4 | 在 (1,2) 附近，線性預測高度為 7+4h+5k；圖示比較 k=0 時的切線與實際切片。

例題2 偏導都有卻不可微

原點以外令 $f=xy/\sqrt{(x^2+y^2)}$，原點定為 0。兩條軸上都為 0，所以偏導都是 0。取 $(h,k)=(t,t)$，$t\neq0$ 時 $f=|t|/\sqrt{2}$；除以位移長度 $\sqrt{2}|t|$ 得 1/2，不趨零，故候選 $L=0$ 不合。另一方面 $|f|\le\sqrt{(x^2+y^2)}/2$，原點確實連續。

例題3 偏導只動一個輸入

$f(x,y)=e^{x}y^{2}$。求 f_x 時 y^2 固定，得 $e^{x}y^{2}$；求 f_y 時 e^{x} 固定，得 $2ye^{x}$。在 (0,3) 值為 9、6。兩偏導在整平面連續，故該點可微。

例題4 用增量核對切平面

$f=xy$，在 (2,3) 加位移 (h,k)，實增量為 $3h+2k+hk$，線性部分為 $3h+2k$。用 $(h,k)=(1/10,-1/10)$ 時預測 1/10、實增量 9/100。實增量減線性預測等於 $-1/100$，正是 hk。

2.3 練習

1 **B09-C02-Q01** 求 x^3y+2y^2 的兩個偏導。

2 **B09-C02-Q02** 在 $(1,0)$ 求 $e^x\cos y$ 的 f_y。

3 **B09-C02-Q03** 求 $f=x^2+y^2$ 在 $(1,-1)$ 的切平面。

4 **B09-C02-Q04** $f(x,y)=x^2+3y$，從原點移到 $(1/10,1/5)$，比較線性與實增量。

5 **B09-C02-Q05** 在 $x+y>0$ 上，求 $\ln(x+y)$ 的兩偏導。

6 **B09-C02-Q06** $f(x,y)=|x|+y$ 在原點可微嗎？

7 **B09-C02-Q07** $f=x^2+xy+y^2$ 在 $(1,2)$ 沿 $h=k=t$ 的線性餘項為何？

8 **B09-C02-Q08** 若一個函數可微，為什麼偏導唯一決定線性項？

9 **B09-C02-Q09** 在例題2取點 $(t,-t)$，計算餘項比上位移長度。

10 **B09-C02-Q10** 說明 $f=4x-2y+1$ 的餘項為何。

2.4 完整解答

Q01

對 x 求導時 y 固定，得 $3x^2y$；對 y 求導時 x^3 固定，得 x^3+4y。

Q02

$f_y=-e^x \sin y$；代 $y=0$，$\sin 0=0$，所以為 0。

Q03

高度 2，偏導 $(2,-2)$。所以 $z=2+2(x-1)-2(y+1)=2x-2y-2$。

Q04

原點偏導 $(0,3)$，線性增量 3/5。實增量是 $1/100+3/5=61/100$，差 1/100 來自 x^2。

Q05

內部 $x+y$ 對 x 或 y 的偏導都是 1，外層 ln 的導數是 $1/(x+y)$，故兩者皆為 $1/(x+y)$。正值前提不能省。

Q06

沿 x 軸的差商 $|h|/h$，$h>0$ 得 1、$h<0$ 得 -1，偏導不存在。可微會推出偏導存在，故不可微。

Q07

以例題1的餘項 h^2+hk+k^2 代 $h=k=t$ 得 $3t^2$。其比上 $\sqrt{2}|t|$ 得 $3|t|/\sqrt{2}$，確實趨零。

Q08

任意線性 L 有 $L(h,k)=hL(1,0)+kL(0,1)$。可微式沿兩軸除以非零 h 或 k 並取極限，恰得兩偏導就是 L 的兩個係數。

Q09

兩偏導為 0，餘項就是 f。分子是 $-|t|/\sqrt{2}$，分母 $\sqrt{2}|t|$，對任何 $t\neq 0$ 比值 $-1/2$，仍違反可微條件。

Q10

直接相減得 $f(p+(h,k))-f(p)=4h-2k$，恰是線性項，所以任一 p 的餘項都等於 0。

第3章 方向導數與梯度

3.1 把變化率投到指定方向

設 p 為定義域內點，u 為單位向量。方向導數是 t→0 時 (f(p+tu)−f(p))/t 的極限。位移長度為 |t|，所以這是按單位方向量得的一階變化率。若用一般速度 v，不正規化時算到的是沿 p+tv 的時間變化率。

若 f 在 p 可微，將位移 tu 代入線性近似，得到 $D_u f(p)=\nabla f(p)\cdot u$，其中 $\nabla f=(f_x,f_y)$ 為梯度。內積的絕對值至多為 ∇f 的長度；梯度非零時，沿 $\nabla f/\|\nabla f\|$ 最陡上升，反方向最陡下降。梯度為零時，每個方向的一階變化都為零，不能從這點判斷極值。

若 f 在 p 可微，且可微曲線 γ 滿足 γ(0)=p 並留在同一等高集合，沿 γ 的高度不變。曲線位移是 tγ′(0) 加上比 |t| 更小的量，所以位移長度至多為常數乘 |t|。把它代入 f 的可微式，除以非零 t 再取極限，餘項趨零，得 $\nabla f(p)\cdot\gamma'(0)=0$。當梯度與切向量均非零，兩者垂直。

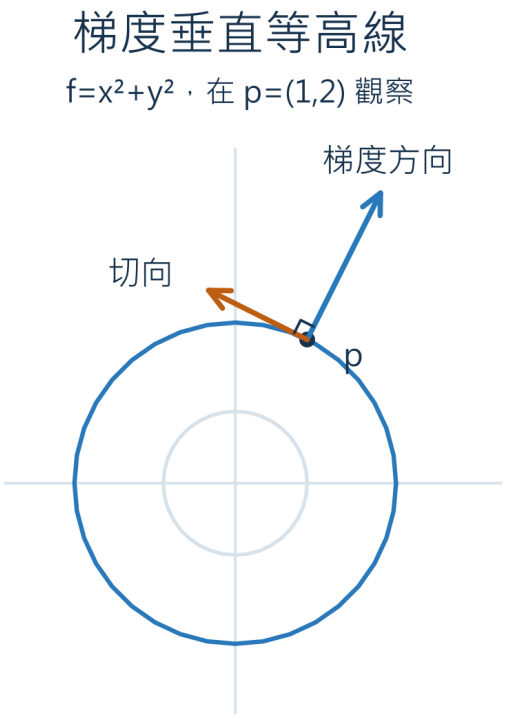


圖5 | 圓的切向箭頭沿同一高度，徑向梯度箭頭與它成直角。

3.2 四個例題

例題1 先把方向變成單位向量

$f=x^2+y^2$，在 $p=(1,2)$，$\nabla f=(2,4)$。方向 $v=(3,4)$ 長 5，所以 $u=(3/5,4/5)$。$D_u f=2\cdot 3/5+4\cdot 4/5=22/5$；若直接乘 v 則是時間變化率 22。

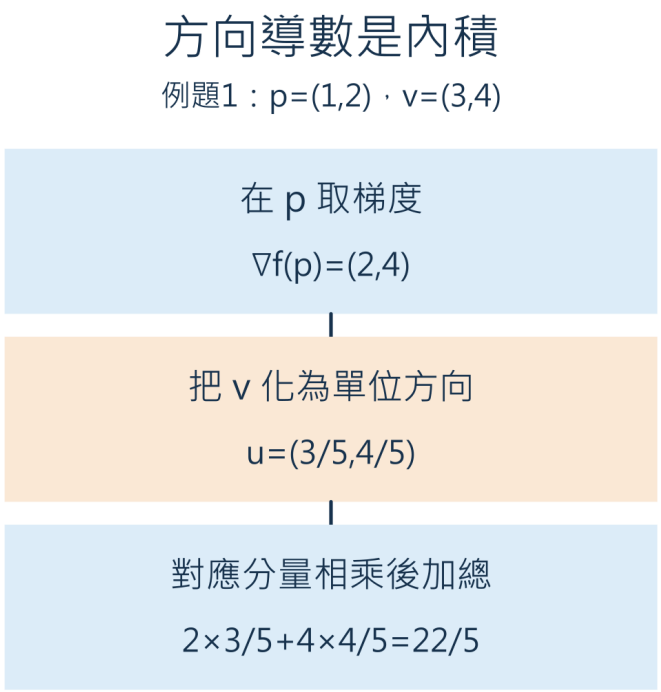


圖6 | 在 $p=(1,2)$，梯度 $(2,4)$ 沿 $u=(3/5,4/5)$ 的內積是 22/5；不把 u 的長度再算一次。

例題2 找最陡上升與下降

$f=3x-4y$，梯度恆為 $(3,-4)$，長度 5。上升最快沿 $(3/5,-4/5)$，變化率 5；反方向得 −5。若只問最大變化率，不應答向量。

例題3 等高切向可用內積檢查

$p=(1,2)$ 在 $x^2+y^2=5$ 上。半徑方向為 $(1,2)$，候選切向 $v=(-2,1)$ 與其垂直。用 $u=v/\sqrt{5}$，梯度點乘得 $(-4+4)/\sqrt{5}=0$。這只說一階變化為零，不是沿直線移動永遠等高。

例題4 方向導數全有也不夠

令 $f=x^3y/(x^6+y^2)$ 於非原點，$f(0,0)=0$。沿 (ta,tb)，若 $b\neq0$，差商化成 $t\,a^3b/(t^4a^6+b^2)$，趨 0；$b=0$ 時恆為 0。因此每個單位方向導數都是 0。但沿 (t,t^3)，$t\neq0$ 時 $f=1/2$，原點不連續，更不可能可微。

3.3 練習

1 **B09-C03-Q01** 求 $f=xy+y^2$ 的梯度。

2 **B09-C03-Q02** 上題在 $(2,1)$ 沿 $(1,0)$ 的方向導數？

3 **B09-C03-Q03** $f=2x+y$，沿 $(1,1)$ 的單位方向，方向導數多少？

4 **B09-C03-Q04** $\nabla f(p)=(0,-7)$，最大方向導數及方向？

5 **B09-C03-Q05** 梯度 $(2,3)$ 對方向 $v=(3,-2)$ 的方向導數？

6 **B09-C03-Q06** 若 f 在原點可微且梯度為零，原點一定極值嗎？

7 **B09-C03-Q07** $f=x^2+y^2$，在 $(1,0)$ 沿 $(0,1)$ 移動 t，實增量為何？

8 **B09-C03-Q08** $\nabla f(p)=(3,4)$，沿速度 $v=(0,2)$ 的時間變化率與單位方向變化率？

9 **B09-C03-Q09** 沿曲線 $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$，$f=x^2+y^2$，於 $t=0$ 驗梯度與切向正交。

10 **B09-C03-Q10** 若輸入方向向量 $v=0$，能用 $v/\|v\|$ 取方向嗎？

3.4 完整解答

Q01

偏導分別為 y 與 x+2y，所以 ∇f=(y,x+2y)。

Q02

代入梯度為 (1,4)，與 (1,0) 內積是 1，即該點的 x 偏導。

Q03

向量長 √2，先除以 √2；(2,1)·(1,1)/√2=3/√2。

Q04

梯度長 7，沿 (0,−1) 得 7；雖然 y 偏導為負，向下走才最快增加。

Q05

v 長 √13，梯度點乘 v 為 2·3−3·2=0，因此除以長度後仍為 0。

Q06

不一定。$f=x^2-y^2$ 的梯度在原點為零，沿 x 軸為正，沿 y 軸為負，任意小鄰域都有比 0 大及小的值。

Q07

該方向導數是 0；但 $f(1,t)-f(1,0)=t^2$。沿切線的變化只是比一階更小，並非完全為 0。

Q08

時間率 (3,4)·(0,2)=8；單位方向 (0,1) 給 4。兩者相差速度大小 2。

Q09

γ(0)=(1,0)、γ′(0)=(0,1)，∇f=(2,0)。內積 0，與 f(γ(t)) 恆為 1 一致。

Q10

不能，分母為 0，零向量沒有方向；常值路徑 p+tv=p 的時間導數是 0，和單位方向導數不是同一件事。

第4章 全微分與鏈式法則

4.1 先對尺寸，再讓微分相乘

對 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，若 $F(p+h)=F(p)+Ah+r(h)$，且 $||r(h)||/||h||\to 0$，就稱 F 在 p 可微，$DF(p)=A$。矩陣 A 的第 i 列是第 i 個輸出的偏導，第 j 欄描述第 j 個輸入的變化；尺寸是 m×n。這個矩陣稱 Jacobian 矩陣。單一輸出時它是一列，梯度通常寫成欄，兩者互為轉置。

設 G 把輸入映到 F 的定義域，G 在 p 可微，F 在 G(p) 可微。令 $k=G(p+h)-G(p)$。內層可微式給 $k=DG(p)h$ 加上比 $||h||$ 更小的量，故 h 夠小時有 $||k||\le C||h||$。對非零 k，外層餘項除以 $||h||$，可寫成它除以 $||k||$ 後再乘 $||k||/||h||$，前者趨零、後者有界。若 $k=0$，外層餘項本來就是零。因此 $D(F\circ G)(p)=DF(G(p))DG(p)$，先作用內層，再作用外層，並各自在指定點取值。

對 f 的小增量，$df=\nabla f(p)\cdot h$ 是線性預測，$\Delta f=f(p+h)-f(p)$ 是實際改變。兩者在有限位移時不必相等；近似誤差要用模型或界估計。

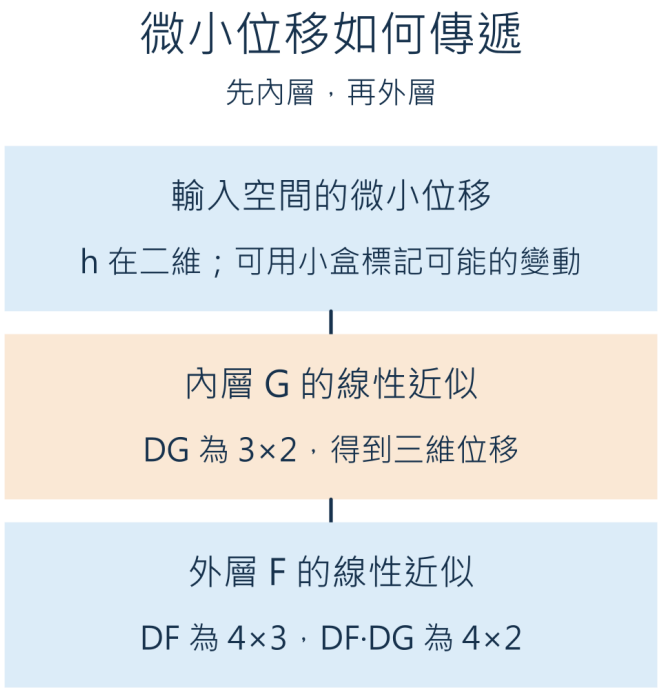


圖7 | 輸入位移先經內層微分，再經外層微分；兩個矩陣的中間尺寸相等。

4.2 四個例題

例題1 沿曲線算兩個輸出的速率

令 $F(x,y)=(x^2+y,xy)$，$\gamma(t)=(t,2t)$。$DF=[2x,1;y,x]$；在 $\gamma(1)=(1,2)$ 成 $[2,1;2,1]$。乘 $(1,2)^T$ 得 $(4,4)^T$。直接把 $F\circ\gamma$ 寫成 $(t^2+2t,2t^2)$ 再微分，在 1 也得同值。

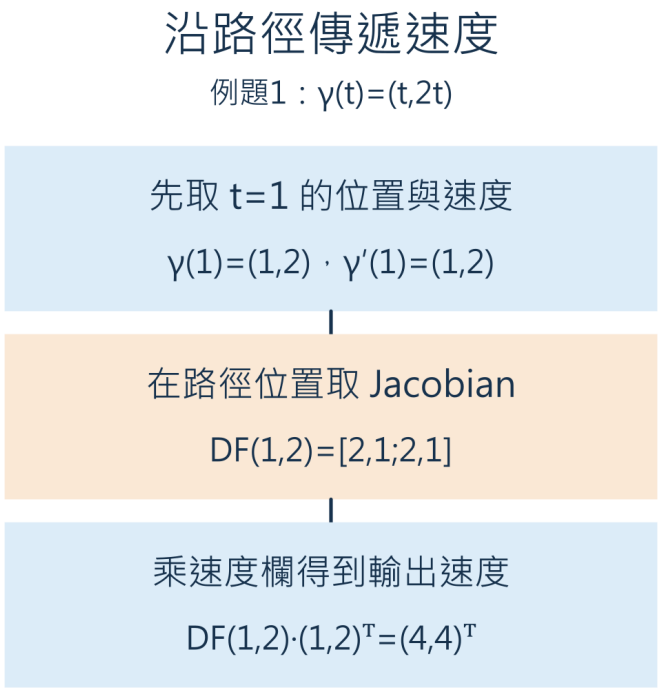


圖8｜沿 γ(t)=(t,2t) 到 t=1，將 γ′(1)=(1,2) 乘進 DF(1,2)，得到速度 (4,4)。

例題2 兩條路徑都會影響輸出

令 u=x+y、v=x−y，w=u²+3v。對 x 改變，u 與 v 都以速率 1 改變，w_x=2u+3；對 y 改變，u 速率 1、v 速率 −1，w_y=2u−3。在 (2,1) 的 u=3，得到 (9,3)。

例題3 量測誤差要保留單位

面積 A(L,W)=LW，L=10 cm、W=4 cm，誤差 h=1/10 cm、k=−1/5 cm。dA=4h+10k=−8/5 cm²，實增量再加 hk=−1/50 cm²，得 −81/50 cm²。小誤差盒若只知道 |h|≤1/10、|k|≤1/5，就有 |dA|≤12/5 cm²、|hk|≤1/50 cm²。

例題4 中間空間可有不同維度

G(t)=(t,t²,t³)，F(x,y,z)=(x+y,z−y)。DF 是 2×3 的 [1,1,0;0,−1,1]，DG(2)=(1,4,12)ᵀ 是 3×1，結果 (5,8)ᵀ。反乘的尺寸不合，且不代表同一個複合。

4.3 練習

1 **B09-C04-Q01** 寫 $F(x,y)=(x+y^2,3xy)$ 的 Jacobian。

2 **B09-C04-Q02** 上題在 $(1,2)$ 的微分作用於 $(1,-1)$ 會得到什麼？

3 **B09-C04-Q03** 令 $z=xy$、$x=t^2$、$y=1+t$，求 $t=1$ 的 dz/dt。

4 **B09-C04-Q04** $w=e^u$、$u=x-2y$，求兩個偏導。

5 **B09-C04-Q05** $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$、$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$，兩者在鏈式法則所需點可微時，$D(F\circ G)$ 的尺寸為何？

6 **B09-C04-Q06** 對 $f=x^2+y$，在 $(3,1)$ 取 $h=-1/10$、$k=1/5$，求 df。

7 **B09-C04-Q07** 若 $f(x,y)=x^2+y^2$，且 $\gamma(t)=(t,t)$，求 $(f\circ\gamma)'(2)$。

8 **B09-C04-Q08** 只知 $DG(p)=0$，能保證複合在 p 可微且微分為零嗎？

9 **B09-C04-Q09** 令 $F(u,v)=u-v$、$G(x,y)=(xy,x+y)$。在 $(2,3)$ 求複合的 Jacobian。

10 **B09-C04-Q10** $A=LW$ 且兩邊皆增 1 cm，為何 ΔA 和 dA 相差 $1\ \text{cm}^2$？

4.4 完整解答

Q01

逐輸出取偏導成兩列：第一列 (1,2y)，第二列 (3y,3x)，故是 [1,2y;3y,3x]。

Q02

DF(1,2)=[1,4;6,3]，乘位移欄得 $(1-4,6-3)^{T}=(-3,3)^{T}$。

Q03

$z_x=y=2$、$z_y=x=1$，$x'=2$、$y'=1$，所以 dz/dt=2·2+1·1=5。

Q04

外層對 u 求導得 e^{u}；$u_x=1$、$u_y=-2$，所以偏導為 e^(x−2y) 與 −2e^(x−2y)。

Q05

DG 為 3×2，DF 為 4×3。DF 左乘 DG，得到 4×2，正是四個輸出對兩個輸入。

Q06

偏導為 (6,1)，故 df=6·(−1/10)+1/5=−2/5。實增量比它多 $h^2=1/100$。

Q07

複合是 $2t^2$，導數 4t 在 2 為 8；用梯度 (4,4) 點乘 (1,1) 也得 8。

Q08

只知 DG(p)=0，不能保證。取 $G(t)=t^3$、F(s)=實數立方根 $\sqrt[3]{s}$。在 0 有 G′(0)=0，但複合恆為 t，導數是 1。也可取 $G(t)=t^2$、$F(s)=\sqrt{|s|}$，複合為 |t|，在 0 不可微。若另知 F 在 G(p) 可微，鏈式法則才給 DF(G(p)) 乘零矩陣，所以複合微分為零。

Q09

DF=(1,−1)，DG 在點上為 [3,2;1,1]。相乘得 (2,1)；直接微分 xy−x−y 亦然。

Q10

展開 (L+1)(W+1)−LW 得 L+W+1，線性項是 L+W。

實增量減線性預測，就是兩個邊長增量相乘，等於 1 cm^2。

第5章 Hessian與Taylor近似

5.1 二階項記錄曲率與交互作用

若 f 在 p 附近有連續的二階偏導，Hessian H 是二階偏導矩陣；混合偏導相等，所以 H 對稱。以欄位移 $d=(h,k)^T$ 表示，二階近似為 $f(p)+\nabla f(p)\cdot d+(1/2)d^TH(p)d$。矩陣乘開後，兩個混合項合成 $f_{xy}(p)hk$，不能漏掉或把它再除以 2。

讓位移 d 夠小，使 p+td 在 0≤t≤1 時都留在二階偏導連續的鄰域。令 $g(t)=f(p+td)$，則 $g'(0)=\nabla f(p)\cdot d$、$g''(t)=d^TH(p+td)d$。對 g 在 0 做一階 Taylor 展開，帶二階 Lagrange 餘項，再加減 $g''(0)/2$，可知二階式之後的誤差為 $(1/2)d^T(H(p+\theta d)-H(p))d$，其中 $0<\theta<1$。矩陣差在整段一致趨零，故誤差除以 $||d||^2$ 趨零。若 g 還在該段有連續三階導數且 $|g'''|\le M$，二階 Taylor 式的三階餘項絕對值至多 M/6。

混合項出現兩次

對 $f=x^2+xy+2y^2$ 的 Hessian

2	1
1	4

$d^THd = 2h^2 + hk + kh + 4k^2$

再乘 1/2，得到 $h^2+hk+2k^2$

非對角項成對，不要只取一個再除以 2

圖9｜圖中 $f=x^2+xy+2y^2$ 的兩個非對角 Hessian 元素都是 1，各貢獻 hk；乘 1/2 後合成一個 hk。

5.2 四個例題

例題1 二次函數的近似是等式

f=x²+xy+2y²，在 p=(1,1) 有 f=4、∇f=(3,5)，H=[2,1;1,4]。乘開二次項得 h²+hk+2k²，所以 f(1+h,1+k)=4+3h+5k+h²+hk+2k²。沿 h=k=t，二次修正為 4t²。

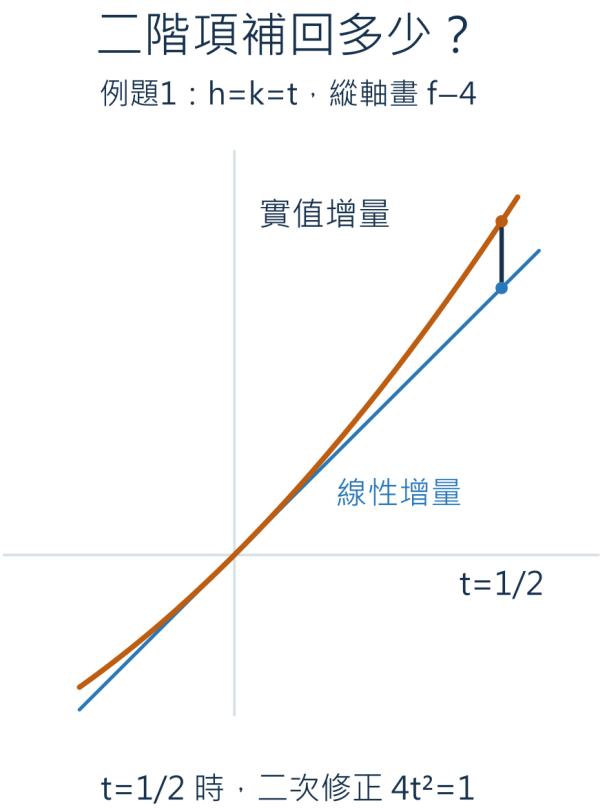


圖10｜對 f=x²+xy+2y²，展開式到二階就精確；沿 h=k=t，線性預測與實值相差 4t²。

例題2 用合成變數估計餘項

f=e^(x+y) 在原點，二階式是 1+(x+y)+(x+y)²/2。取 (h,k)=(1/10,−1/20) 時 s=h+k=1/20，近似 1+1/20+1/800=841/800。由一維指數函數三階餘項，絕對誤差至多 e^(1/20)/48000。

例題3 區分二階項和二階方向率

$f=x^2+3xy+y^2$，$H=[2,3;3,2]$。沿速度 $d=(1,-1)$ 有二階時間導數 $d^THd=-2$。沿單位方向 $u=d/\sqrt{2}$ 則是 -1；Taylor 式裡還要再乘 $1/2$ 與位移參數平方。

例題4 二階式為零也可能有變化

$f=x^3+y^4$ 在原點的一、二階導數皆零，二階 Taylor 式為 0。沿 x 軸 $f(t,0)=t^3$，正負號隨 t 改變；二階資料不能判定原點為極值。

5.3 練習

1 **B09-C05-Q01** 求 $f=x^2+4xy+3y^2$ 的 Hessian。

2 **B09-C05-Q02** 寫上題在原點的二階式。

3 **B09-C05-Q03** 求 $f=x^2y^3$ 的混合二階偏導。

4 **B09-C05-Q04** $f=x^2+y^2$ 在 $(1,1)$，$d=(1/10,1/10)$。二階修正多少？

5 **B09-C05-Q05** 對 $f=\cos(x+y)$，寫原點二階式。

6 **B09-C05-Q06** $f=x^3$ 在 $x=1$（與 y 無關），寫到二階並給餘項。

7 **B09-C05-Q07** 若 f 的二階 Taylor 式為 0，是否 f 必在鄰域恆等於 0？

8 **B09-C05-Q08** 對 $f=xy$，$d=(2,-1)$，求 $d^THd/2$。

9 **B09-C05-Q09** 在例題2，若取 $s=-1/10$，用二階式估計 e^s。

10 **B09-C05-Q10** 只知道 f_{xy} 與 f_{yx} 在一點存在，能直接依本章條件宣稱相等嗎？

5.4 完整解答

Q01

$f_x=2x+4y$、$f_y=4x+6y$，再逐一求偏導得 $H=[2,4;4,6]$。

Q02

原點函數值與梯度為零，矩陣式 $(1/2)d^THd$ 展開為 $h^2+4hk+3k^2$；這裡也是實際值。

Q03

先對 x 得 $2xy^3$，再對 y 得 $6xy^2$；反順序先得 $3x^2y^2$、再得 $6xy^2$。多項式的二階偏導連續。

Q04

$H=2I$，二階修正就是 $h^2+k^2=1/50$。線性部分為 $2h+2k=2/5$。

Q05

一維 cos s 在 0 的值、一次、二次導數分別為 1、0、−1；代 $s=x+y$，得 $1-(x+y)^2/2$。

Q06

$(1+h)^3=1+3h+3h^2+h^3$。前面三項是二階式，留下 h^3；用 Hessian 的 x 二階偏導 6 也得 $(1/2)\cdot 6h^2$。

Q07

不必。$f(x,y)=x^3$ 的原點函數值與一、二階導數為零，但每個小鄰域都有 $x\neq 0$ 的點使 $f\neq 0$。

Q08

H 的對角為 0、兩個非對角皆為 1。矩陣式給 $(1/2)(-2-2)=-2$，恰等於 hk。

Q09

代入 $1-1/10+1/200=181/200$。介於 s 與 0 的指數值至多 1，所以誤差至多 $|s|^3/6=1/6000$。

Q10

不能。本章使用的是該點鄰域二階偏導連續的充分條件。反例是在原點取 0，其餘點取 $f(x,y)=xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$。從差商得 $f_x(0,y)=-y$、$f_y(x,0)=x$，包含 $y=0$ 或 $x=0$。因此在原點，先對 x 再對 y 得 −1，先對 y 再對 x 得 1。兩個混合偏導都存在，但不相等。

第6章 無約束極值與凸性

6.1 駐點、局部極值和全域最小各有條件

若 f 在內點 p 可微且有局部極值，沿每條座標線的一維導數都必為零，所以 $\nabla f(p)=0$。滿足這個條件的點稱駐點；零梯度是必要，不是充分。邊界點與不可微點須另查。

若 f 在 p 附近二階連續可微且 $\nabla f(p)=0$，$H(p)$ 正定時，$(1/2)d^{T}Hd$ 對任意非零 d 皆正。在單位球面取它的最小值，連續與緊緻保證此值為正，故二次項至少是固定正數乘 $||d||^2$；更小階的餘項不會改號。這給嚴格局部最小。負定給嚴格局部最大；有正有負的方向給鞍點。若只有半正定或半負定，這個測試可能無法下結論。

凸集合包含任兩點的線段。定義在凸集合上的凸函數滿足 $f((1-t)p+tq)\le(1-t)f(p)+tf(q)$，$0\le t\le 1$。把不等式減 f(p)、除以 $t>0$，再令 $t\to 0$；若 f 在 p 可微，便得 $f(q)\ge f(p)+\nabla f(p)\cdot(q-p)$。所以凸函數的內點駐點是全域最小；一般函數的局部結論不能照搬。

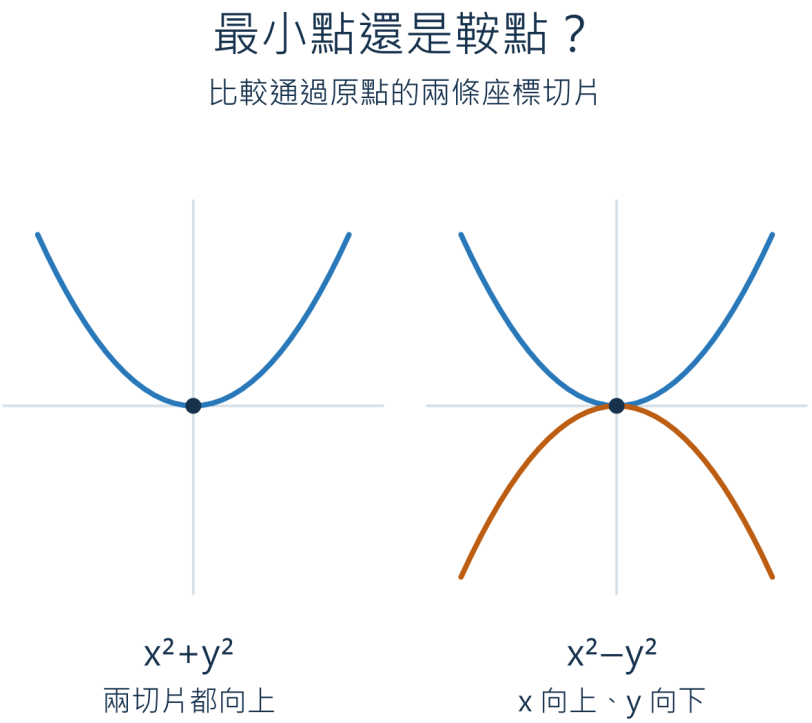


圖11 | 從原點作任意非零位移，x^2+y^2 都增大；對 x^2-y^2，沿 x 軸增大、沿 y 軸減小。兩者在原點的一階導數均為零。

6.2 四個例題

例題1 平方和直接給全域最小

$f=(x-2)^2+2(y+1)^2$，梯度為 $(2(x-2),4(y+1))$，只在 $(2,-1)$ 為零。兩個平方非負且同時為零只在該點，所以最小值 0 且唯一。沿任一線段，二次導數是 $2(dx)^2+4(dy)^2\geq 0$，故此函數也凸。

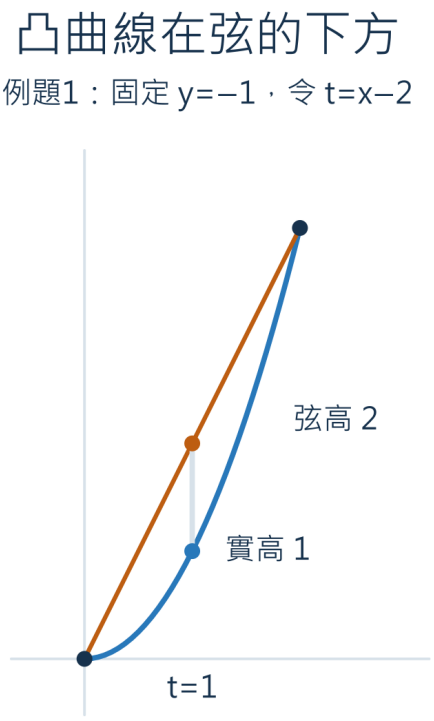


圖12 | 在例題1固定 y=−1 並令 t=x−2，得到凸函數 t^2；t=0 與 2 的中點高度低於弦上平均。

例題2 同樣是駐點，卻是鞍點

$f=x^2-y^2$，原點梯度零。$H=[2,0;0,-2]$，沿 x 軸增量 t^2，沿 y 軸 $-t^2$。兩種符號出現在任意小鄰域，所以不是極大也不是極小。

例題3 半正定不能替代高階檢查

$f=x^4+y^2$ 與 $g=-x^4+y^2$ 在原點都有 $H=[0,0;0,2]$。f 在原點有嚴格最小；g 沿 y 軸正、沿 x 軸負，所以是鞍點。同一個 Hessian，結論不同。

例題4 限制區域後，最小值可在邊上

在 $0\le x\le 2$、$0\le y\le 1$ 最小化 $(x-3)^2+(y-1/2)^2$。第二平方在 $y=1/2$ 為 0；第一平方在區間內隨 x 增加而減小，到 $x=2$ 為 1。故最小點 $(2,1/2)$，梯度 $(-2,0)$ 非零，不違反內點必要條件。

6.3 練習

1 **B09-C06-Q01** 求 x^2+3y^2-2x 的駐點與最小值。

2 **B09-C06-Q02** 分類 $f=-x^2-2y^2$ 的原點。

3 **B09-C06-Q03** 分類 $f=xy$ 的原點。

4 **B09-C06-Q04** $f=x^4+y^4$ 的 Hessian 在原點為零，能用原函數判斷嗎？

5 **B09-C06-Q05** 單位閉圓盤為何是凸集合？

6 **B09-C06-Q06** 單位圓周（不含內部）是凸集合嗎？

7 **B09-C06-Q07** 對 $f(t)=t^2$，比較 $f(1)$ 與 $f(0)$、$f(2)$ 的平均。

8 **B09-C06-Q08** 若 f 是嚴格凸函數，能同時有兩個不同全域最小點嗎？

9 **B09-C06-Q09** 在線段 $0\le t\le 2$ 上最大化 t^2-2t。

10 **B09-C06-Q10** $f(x,y)=e^x+y^2$ 在整平面有最小值嗎？

6.4 完整解答

Q01

梯度 $(2x-2,6y)$ 給 $(1,0)$。配方 $f=(x-1)^2+3y^2-1$，最小值 -1 且在該點取到。

Q02

梯度零，H 對角是 -2、-4，負定。也可看每個非零點的 f 都負；故原點是唯一全域最大。

Q03

梯度 (y,x) 為零；沿 $y=x$ 得 t^2，沿 $y=-x$ 得 $-t^2$。二者任意靠近原點，故是鞍點。

Q04

可以。每項都非負，且只有 $x=y=0$ 時同時為零，所以原點是嚴格全域最小；零矩陣本身並未給出這個結論。

Q05

若 $\|p\|\le 1$、$\|q\|\le 1$，三角不等式給 $\|(1-t)p+tq\|\le(1-t)\|p\|+t\|q\|\le 1$，故線段不離開圓盤。

Q06

不是。$(1,0)$、$(-1,0)$ 在圓周，中點 $(0,0)$ 不在圓周，所以違反線段條件。

Q07

$f(1)=1$，端點平均 $(0+4)/2=2$。中點低於弦，這是凸性不等式的一次檢查，不是整體證明。

Q08

不能。兩個最小點若同值 m，嚴格凸性使其中點值嚴格小於 m，矛盾。這不保證一定存在最小點。

Q09

配方 $(t-1)^2-1$，區間內 $|t-1|\le 1$，兩端點給最大值 0，內部駐點 $t=1$ 反而是最小值 -1。

Q10

$f>0$；沿 $y=0$、$x\to-\infty$，值趨 0。下確界是 0，卻無輸入達到。凸性不等於極值存在。

第7章 等式約束與Lagrange乘數

7.1 只沿可行方向檢查變化

設 $p=(a,b)$ 是 $g(x,y)=c$ 上 f 的局部極值點，且鄰近 p 的這段等高曲線都可行。取 f、g 在 p 的開鄰域可微，g 的一階偏導連續，並且 $\nabla g(p)\neq 0$。若 $g_y(p)\neq 0$，隱函數定理將附近等高曲線寫成 $y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(a)=b$、$\varphi'(a)=-g_x(p)/g_y(p)$。沿曲線的一維函數在 $x=a$ 有局部極值，故 $f_x(p)-f_y(p)g_x(p)/g_y(p)=0$。取 $\lambda=f_y(p)/g_y(p)$，便得 $\nabla f(p)=\lambda\nabla g(p)$。若 $g_x(p)\neq 0$ 可對調座標。額外限制形成的端點另查。

因此先解 $g=c$ 與 $\nabla f=\lambda\nabla g$ 找正則候選，再另查 $\nabla g=0$ 的可行點與額外邊界或端點。乘數條件只必要，不能當極值保證。若可行集非空、閉且有界且 f 連續，才可用極值定理保證最值存在，再比較候選值。

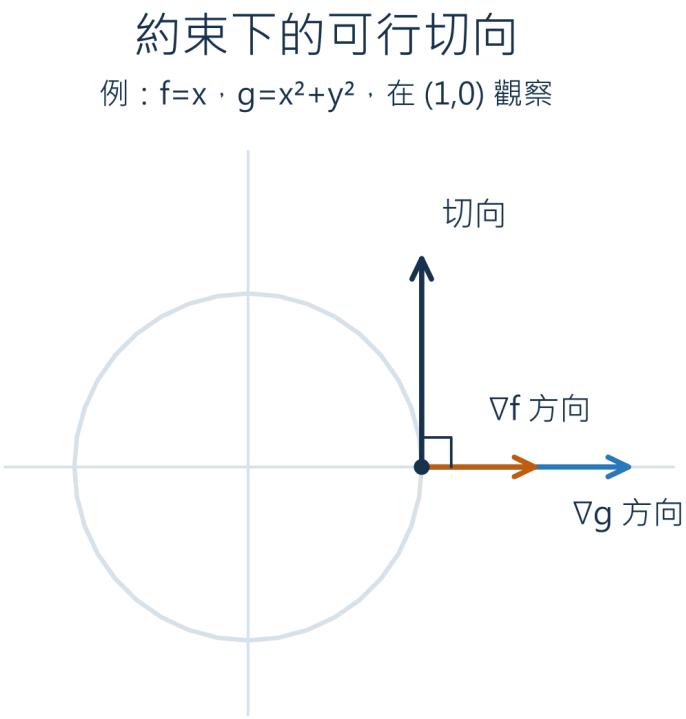


圖13 | 正則可行曲線的切向與 ∇g 垂直；若 f 沿曲線有極值，∇f 也與同一切向垂直。

7.2 四個例題

例題1 在圓周上找最大與最小

f=x+2y，g=x²+y²=1。圓上 ∇g=(2x,2y) 非零。由 (1,2)=λ(2x,2y)，點必為 (1,2)/√5 或其負向。代 f 得 ±√5。圓周緊緻且 f 連續，兩點就是最大與最小。

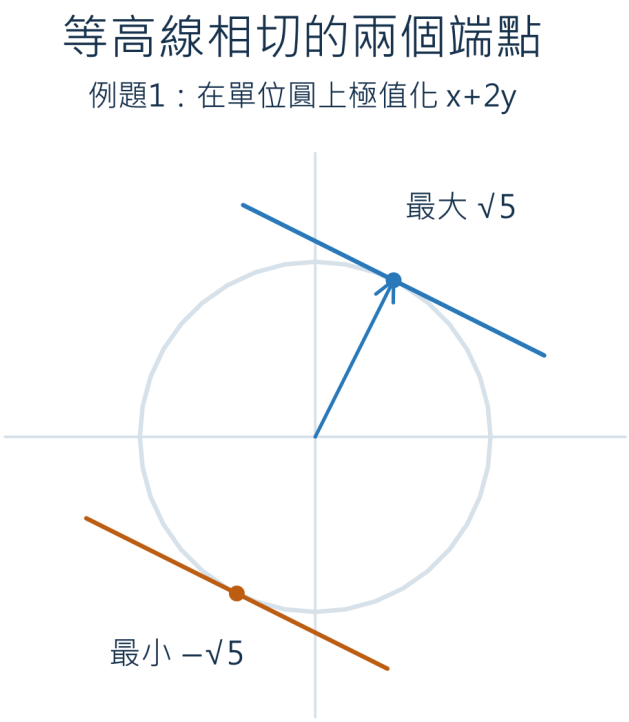


圖14 | 在單位圓上，x+2y 的最大與最小出現在方向 (1,2) 的兩端，對應兩條相切的等高線。

例題2 線段上的端點也要算

最大化 xy，約束 x+y=6、x,y≥0。內部乘數條件 (y,x)=λ(1,1) 給 x=y=3，值 9。端點 (6,0)、(0,6) 值 0。代 y=6−x 也得 xy=9−(x−3)²，在整段最大 9、最小 0。

例題3 奇異點可能漏在方程組之外

約束 x²+y²=0 只有原點，f=x 在這個集合上同時達到最大與最小。但 ∇g(0,0)=0，而 ∇f=(1,0)，找不到乘數。這是正則性缺失，不是極值不存在。

例題4 最接近原點的可行點

在 x+2y=5 上最小化 x²+y²。正則條件 (2x,2y)=λ(1,2) 給 y=2x，再代約束得 (1,2)。可行點減 (1,2) 的位移 d 滿足 (1,2)·d=0，所以平方距離為 5+||d||²，確證唯一最小，即使直線不緊緻。

7.3 練習

1 **B09-C07-Q01** 在 x²+y²=4 上最大化 x。

2 **B09-C07-Q02** 在 x+y=4 上最小化 x²+y²。

3 **B09-C07-Q03** 在 x²+y²=1 上找 f=xy 的最大與最小。

4 **B09-C07-Q04** 在 x+y=5、x,y≥0 上最小化 xy。

5 **B09-C07-Q05** g=x²+y²=0 的可行點是否正則？

6 **B09-C07-Q06** g=y²=0 和 g=y=0 代表同一集合，正則性是否一樣？

7 **B09-C07-Q07** 若 ∇f=2∇g 且沿可行曲線的切向量為 v，一階變化為何？

8 **B09-C07-Q08** 在 y=0 上，f=x³ 於原點符合乘數條件嗎？是極值嗎？

9 **B09-C07-Q09** 在 x−y=0 上，f=x+y 有全域最值嗎？

10 **B09-C07-Q10** 比較 ∇f=λ∇g 和 ∇f=0 的適用處。

7.4 完整解答

Q01

$x\le 2$，且 $(2,0)$ 可行，達到 2。乘數式 $(1,0)=\lambda(2x,2y)$ 也給 $y=0$，兩個候選 $x=\pm 2$；較大者為 2。

Q02

正則乘數式給 $x=y$，故 $x=y=2$。代 $y=4-x$ 得 $2(x-2)^2+8$，最小值 8，並確認為全域。

Q03

乘數式為 $(y,x)=2\lambda(x,y)$。若一個座標為零，另一個也必須為零，與單位圓矛盾。兩式相乘得 $4\lambda^2=1$，故 $y=\pm x$、$x^2=y^2=1/2$。x、y 同號時 $xy=1/2$，異號時 $xy=-1/2$。圓周緊緻且 f 連續，所有極值都在這些候選點中，所以比較即得全域最大與最小。

Q04

$xy\ge 0$，且兩端 $(0,5)$、$(5,0)$ 皆為零，所以最小值 0。只找內部乘數點 $(5/2,5/2)$ 會漏掉這個最小值。

Q05

只有原點，而 $\nabla g=(2x,2y)$ 在該點為零，故不是正則點。可直接檢查可行集的唯一點。

Q06

不一樣。前者梯度 $(0,2y)$ 在線上為零；後者梯度恆為 $(0,1)$。同一可行集的不同描述，可能有不同的正則性。

Q07

$\nabla g\cdot v=0$，故 $\nabla f\cdot v=2\nabla g\cdot v=0$。這只是一階必要條件，不能宣稱沿曲線值恆定。

Q08

$\nabla f=(0,0)$、$\nabla g=(0,1)$，取 $\lambda=0$ 即符合；但 x^3 在左右異號，原點不是局部極值。

Q09

可行點寫 (t,t)，函數值是 $2t$。隨 t 向正或負無窮可任意大或小，無最大也無最小。

Q10

前者用在正則等式約束的極值，目標只需在可行切向上一階不變；後者用在無約束可微內點的極值，所有方向都可走。兩式都只是必要條件。

第8章 二重與三重積分

8.1 先畫區域，再決定積分次序

在平面區域 D 上，二重積分把小塊的 f 值乘面積再相加。f≥0 時可解讀成曲面下的體積；f 有正有負時是有向累積，不一定等於幾何體積。若 f 是面密度，f·dA 的單位是質量。三重積分同理用體積小塊 dV；體密度乘體積才是質量。

本章取 f 在有界區域 D 的閉包上連續，並將 D 按所選方向寫成一個或有限個分片光滑的簡單區域。若某片在 α≤x≤β 時的切片為 a(x)≤y≤b(x)，則先按這兩個端點對 y 積，再從 α 到 β 對 x 積。改成先 x 後 y 時，外層和內層範圍都要從固定 y 的切片重新求得；若有多段，就按區域分開相加。三重積分也逐層核對端點。本章處理正規的有限積分，無界區域或奇異被積式須另查收斂及可交換條件。

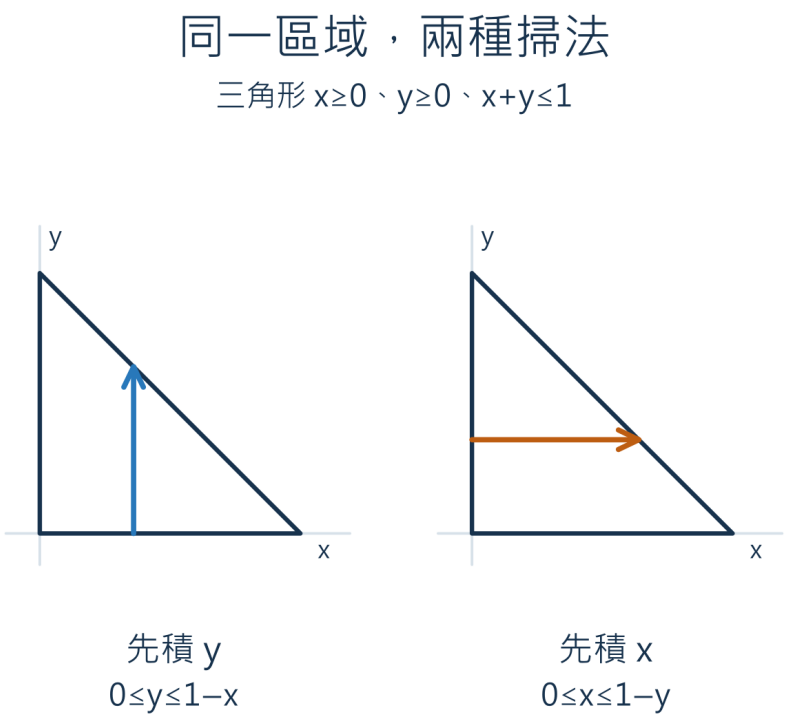


圖15 | 同一個三角形可用垂直切片或水平切片掃過；內層上下限來自切片的兩端。

8.2 四個例題

例題1 先沿 y，再沿 x

在矩形 0≤x≤2、0≤y≤1 積 f=x+2y。固定 x，內積分是 xy+y² 在 0 到 1 的差 x+1。外積分是 x²/2+x 在 0 到 2 的差 4。若高度以公尺計、平面以平方公尺計，此值代表 4 立方公尺。

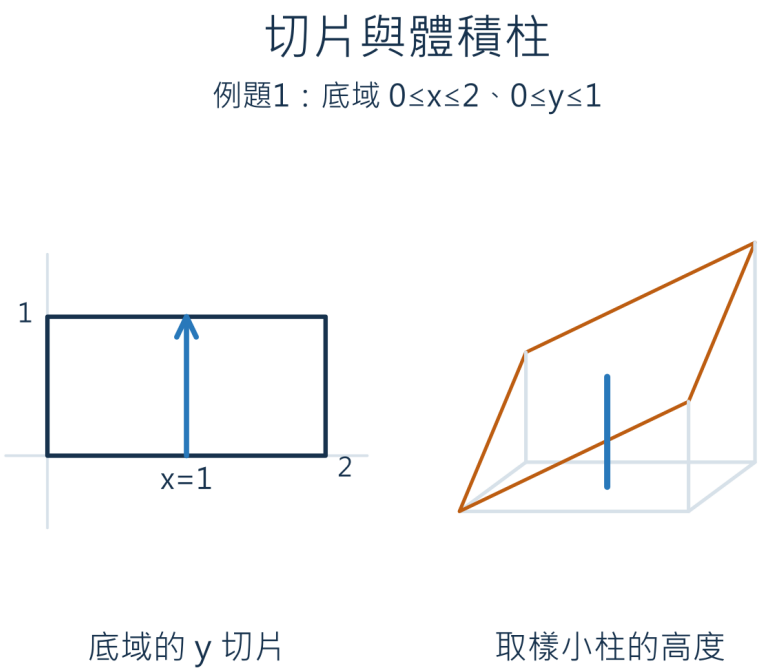


圖16 | 矩形例題固定 x 時，沿 y 從 0 到 1 積分；再讓 x 從 0 掃到 2。

例題2 三角形的內層上限不是常數

D 由 x≥0、y≥0、x+y≤1 定義。固定 x∈[0,1]，y∈[0,1−x]。對 x+y 先積 y 得 x(1−x)+(1−x)²/2=(1−x²)/2，再積 x 得 1/3。換序時固定 y∈[0,1]、x∈[0,1−y]，結果同值。

例題3 用三層切片算四面體體積

在 x,y,z≥0 且 x+y+z≤1 上積 1。固定 x,y，z 的長度是 1−x−y。對 y 從 0 到 1−x 積得 (1−x)²/2；最後 x 從 0 到 1 得 1/6。這裡內層 z 上限依賴兩個外層變數。

例題4 體密度不是體積

長方體 0≤x≤2、0≤y≤1、0≤z≤3（座標數值以公尺計），體密度數值 ρ=1+x，單位 kg/m³。先對 z、y 積給 3(1+x)，再積 x 得 12 kg；長方體體積是 6 m³，不能以 6 代替質量。

8.3 練習

1 **B09-C08-Q01** 在 0≤x≤3、0≤y≤2 積 1。

2 **B09-C08-Q02** 在單位正方形積 xy。

3 **B09-C08-Q03** 寫出 0≤x≤2、0≤y≤x 換成先 x 後 y 的範圍。

4 **B09-C08-Q04** 在上一題三角形積 1，用先 x 後 y。

5 **B09-C08-Q05** 在 0≤x≤1、x²≤y≤x 積 1。

6 **B09-C08-Q06** 對上一題區域寫水平切片的 x 範圍。

7 **B09-C08-Q07** 在 −1≤x≤1、0≤y≤2 積 x。

8 **B09-C08-Q08** 在單位立方體積 f=z。

9 **B09-C08-Q09** 常數體密度 2 kg/m³，區域體積 3 m³，質量多少？

10 **B09-C08-Q10** 為何內層 y 積分的上界不能再含 y？

8.4 完整解答

Q01

內層對 y 積為 2，外層乘 x 長度 3 得 6，即矩形面積。

Q02

固定 x 時積 y 得 x/2，再從 x=0 到 1 積得 1/4。

Q03

y 最低 0、最高 2；固定 y 時 x 至少 y、至多 2。因此外層 $y\in[0,2]$，內層 $x\in[y,2]$。

Q04

內層長度 2−y，對 y 從 0 到 2 積，得 4−2=2。也等於底 2、高 2 的三角形面積。

Q05

每條垂直切片長 $x-x^2$，積得 1/2−1/3=1/6。不能把上界 x 或下界 x^2 直接換成常數。

Q06

外層 $0\le y\le 1$。由 $y\le x$ 得 $x\ge y$；由 $x^2\le y$ 且 $x\ge 0$ 得 $x\le\sqrt{y}$。因此內層從 y 到 $\sqrt{y}$。

Q07

內層 y 給 2x，外層 2x 在對稱區間的正負部分抵消，積分為 0；這不代表兩邊幾何體積都為 0。

Q08

z 從 0 到 1 的積分為 1/2，其餘兩邊長度 1，所以結果 1/2。

Q09

積分就是密度乘體積，$2\cdot 3=6$ kg。單位 m^3 與分母消去。

Q10

固定外層變數後，內層是在一個已定的 y 區間累積；上下限是切片端點，可依外層變數而變，但不能在當下積分過程仍把自由 y 當成自己的端點。

第9章 座標變換與Jacobian

9.1 局部線性縮放決定換元因子

換元把新參數 (u,v) 映到舊座標 (x,y)=T(u,v)。小參數矩形的兩條邊，一階近似分別映成 DT 的兩欄乘各自邊長。因此面積縮放取 |det DT|；若 det 為負，代表方向翻轉，面積仍非負。對三維體積同樣取三階 Jacobian 行列式的絕對值。

本章用以下正規換元情形。取有界參數區域 E 與其像區域 D，T 在 E 的閉包的開鄰域連續可微。排除邊界與切縫後，T 將 E 的其餘部分一對一映到 D 的其餘部分，Jacobian 非零且逆連續可微。兩側略去的邊界與切縫都只占零面積或零體積，被積函數在 D 的閉包連續。於是 $\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_E f(T(u,v))\,|\det DT(u,v)|\,du\,dv$。三維同樣以三個參數和體積元素換元。若參數化重複覆蓋正面積區域，直接積分會重複計數。

極座標 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$，取 $r\ge 0$。Jacobian 的兩欄是 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 與 $(-r\sin\theta,r\cos\theta)$，行列式 $r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$。故 $dA=r\,dr\,d\theta$。圓盤可用 $0\le\theta<2\pi$，中心和角度切縫不改面積積分。柱座標保留 z，故 $dV=r\,dr\,d\theta\,dz$，積分次序按區域選。

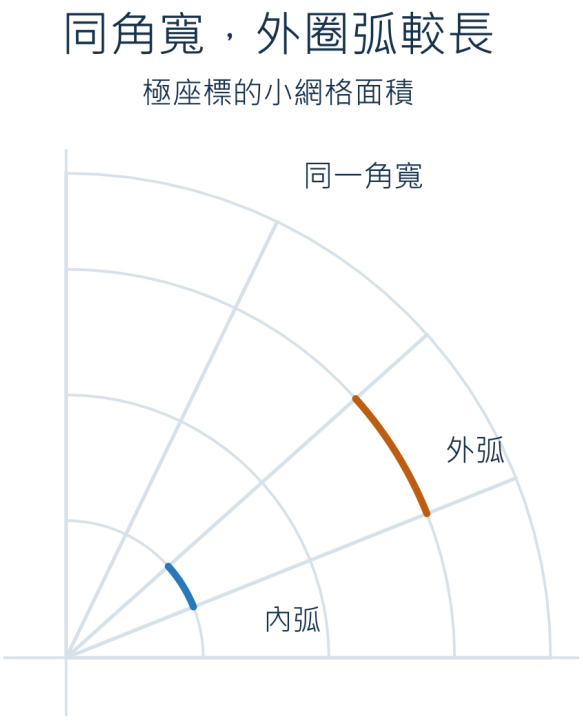


圖17 | 相同的角寬在外圈走過較長弧段，這就是小面積帶有半徑 r 因子的幾何理由。

9.2 四個例題

例題1 用極座標算圓盤面積

半徑 2 的圓盤，對 1 積 dA。先積 r，從 0 到 2 得 $r^2/2$ 的差 2；再乘角度長 2π，得到 4π。若漏乘 r，這一次數字碰巧也為 4π；改半徑 1 就露出錯誤，正確 π、漏乘為 2π。

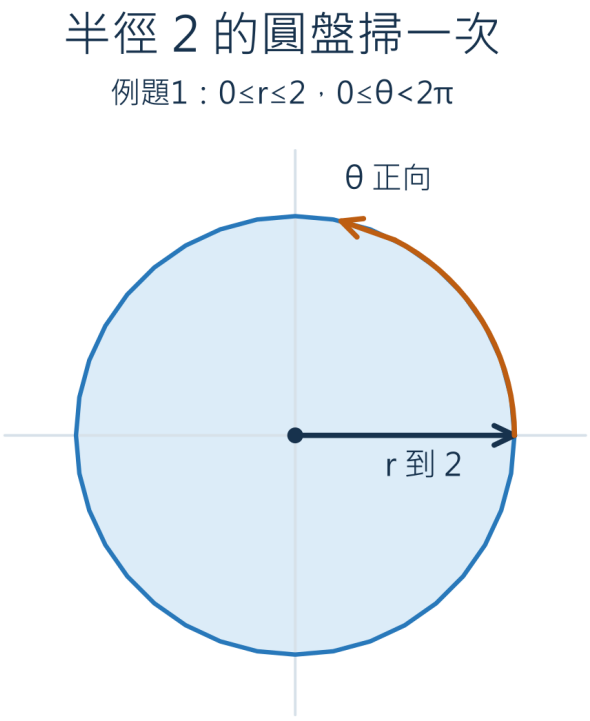


圖18 | 半徑 2 的圓盤以 0≤r≤2、0≤θ<2π 掃一次，面積計算必須保留 r。

例題2 環形區域有內半徑

在 $1\le x^2+y^2\le 4$ 積 x^2+y^2。新函數是 r^2，面積元素再乘 r；r 從 1 到 2，θ 掃 2π。結果 $2\pi\cdot(2^4-1^4)/4=15\pi/2$。

例題3 方向反轉不是負面積

$T(u,v)=(u+v,u-v)$，把單位正方形變成平行四邊形。矩陣 $[1,1;1,-1]$ 的 $\det=-2$，故面積是 $|-2|$ 乘 1=2。兩邊向量的有向面積才是 −2。

例題4 用柱座標算拋物面下體積

區域 $0\le z\le 4-x^2-y^2$，投影圓盤半徑 2。先積 z 得 $4-r^2$，再乘 r，體積為 $2\pi\int$ 從 0 到 2 的 $(4r-r^3)\,dr=2\pi\cdot 4=8\pi$。徑向上限來自高度不可負。

9.3 練習

1 **B09-C09-Q01** 極座標 $(r,\theta)=(2,\pi/2)$ 對應哪一點？

2 **B09-C09-Q02** 求第一象限單位圓盤面積。

3 **B09-C09-Q03** 半徑 3、角寬 $\pi/6$ 的扇形面積？

4 **B09-C09-Q04** 橢圓 $x^2/4+y^2/9\le 1$ 的面積？

5 **B09-C09-Q05** 求 $T(u,v)=(2u+v,u)$ 的面積縮放。

6 **B09-C09-Q06** 若將 θ 從 0 掃到 4π，積分 1 於單位圓盤會發生什麼？

7 **B09-C09-Q07** 半徑 1、高 3 的圓柱體積？

8 **B09-C09-Q08** 在單位圓盤積 x^2+y^2。

9 **B09-C09-Q09** 極座標在 $r=0$ 的行列式為 0，為何仍可計算圓盤面積？

10 **B09-C09-Q10** 把參數 u、v 交換，面積因子會改變嗎？

9.4 完整解答

Q01

$x=2\cos(\pi/2)=0$，$y=2\sin(\pi/2)=2$，故是 $(0,2)$。

Q02

r 從 0 到 1、θ 從 0 到 $\pi/2$；徑向積分為 $1/2$，乘角度長 $\pi/2$ 得 $\pi/4$。

Q03

對 r 從 0 到 3 積得 $9/2$，乘 $\pi/6$ 得 $3\pi/4$。

Q04

令 $x=2u$、$y=3v$，參數區域為單位圓盤，$\det=6$。面積 π 乘 6 得 6π。

Q05

Jacobian $[2,1;1,0]$ 的 $\det=-1$。方向反轉，但 $|\det|=1$，面積不變。

Q06

除切縫與中心外，圓盤幾乎每點被掃兩次。參數積分給 $(1/2)\cdot 4\pi=2\pi$，是真面積 π 的兩倍，違反一對一條件。

Q07

取 $r\in[0,1]$、$\theta\in[0,2\pi)$、$z\in[0,3]$，積 r。先 z 得 $3r$，積 r 與角度後得 3π。

Q08

換成 r^2 後乘 r，徑向積分 $\int$ 從 0 到 1 的 $r^3\,dr=1/4$，再乘 2π，得 $\pi/2$。

Q09

$r=0$ 對應單一中心點，面積為零；在 $r>0$ 且避開一條角度切縫時可用換元，缺掉的集合不影響本章的正規積分。

Q10

在對應參數點，交換 u、v 等於將 Jacobian 的兩欄對調。行列式反號，絕對值相同。參數點、參數區域及被積式都要同步改寫，才能表示同一塊區域。

第10章 向量場與積分關係導讀

10.1 積的是切向、法向，還是長度

對分段光滑曲線 γ(t)，標量線積分以 f(γ(t))||γ′(t)|| dt 累積，反向不變。向量場的做功型線積分以 F(γ(t))·γ′(t) dt 累積，路徑反向時變號。通量則取 F 的法向分量；封閉平面邊界的外向通量，法向指向區域外側，不是沿切線。

Green 公式把平面邊界的環流連到區域內的旋轉量。取有界區域 D，其邊界是分段光滑簡單閉曲線，逆時針走時 D 在左側。若 F=(P,Q) 在包含 D 及邊界的開鄰域有連續一階偏導，則 ∮(P dx+Q dy)=∬(∂Q/∂x−∂P/∂y) dA。沿此正向邊界，外法向乘弧長元素為 (dy,−dx)，所以外向通量是 ∮(P dy−Q dx)。把 Green 環流式套到 (−Q,P)，即可得到通量為 ∬(∂P/∂x+∂Q/∂y) dA。

在三維，取緊緻且已定向的光滑曲面 S，邊界分段光滑，F 在含 S 的開鄰域一階連續可微。Stokes 公式是 ∮_∂S F·dr=∬_S (∇×F)·n dS，其中 n 是所選單位法向，邊界方向由該曲面方向依右手規則誘導。對平面圓盤，從所選法向那一側看，正向邊界是逆時針。

散度定理取有界立體 V 的封閉分片光滑邊界 ∂V，F 在包含整個立體與邊界的開鄰域一階連續可微。令 n 為外單位法向，則 ∬_∂V F·n dS=∭_V (∇·F) dV。Stokes 積的是曲面及其邊界曲線，散度定理積的是立體及其封閉邊界。

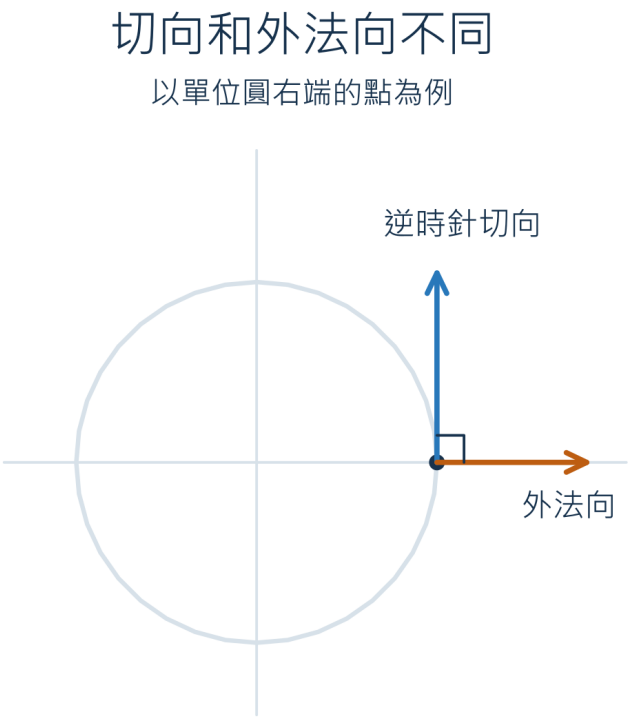


圖19 | 逆時針切向與外法向是兩種方向；環流和通量取的向量分量不同。

10.2 四個例題

例題1 沿拋物線計算做功

$F=(2x,y)$，$\gamma(t)=(t,t^2)$，$0\le t\le 1$。速度 $(1,2t)$，沿路的場為 $(2t,t^2)$，內積 $2t+2t^3$。積分得 $t^2+t^4/2$ 在 0 到 1 的差 $3/2$。反走同一路徑得 $-3/2$。

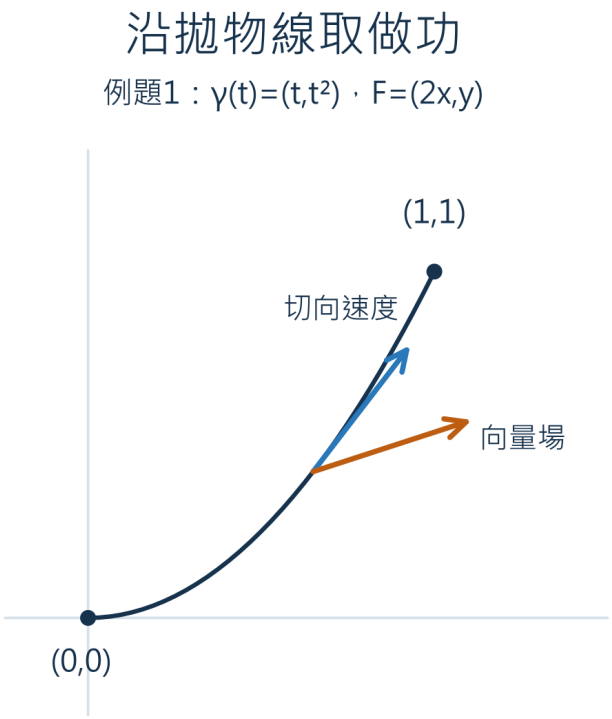


圖20 | 從 (0,0) 沿 $y=x^2$ 走到 (1,1)，沿路取 F 與切向速度的內積，不是取法向分量。

例題2 用兩種方法核對環流

$F=(-y,x)$，沿單位圓逆時針 $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$。$F(\gamma)=\gamma'$，內積 1，積分得 2π。Green 右側為 $\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y=1-(-1)=2$，乘圓盤面積 π 也得 2π。

例題3 同一圓上，通量與環流不一樣

$F=(x,y)$，在單位圓上等於外單位法向，故 $F\cdot n=1$，外向通量為 2π。F 與切向垂直，環流為 0。把法向改成內向，通量才會變號。

例題4 用散度和面通量互驗

$F=(x,y,z)$，在單位立方體上散度為 3，積分為 3。直接查面：$x=1$ 面的外法向是 $(1,0,0)$，通量 1；$x=0$ 面的對應分量為 0。y、z 各自同理，六面總通量 3。

10.3 練習

1 **B09-C10-Q01** γ(t)=(3t,4t)，0≤t≤1。沿曲線積標量 1。

2 **B09-C10-Q02** 反向走上一條線段，標量線積分會變負嗎？

3 **B09-C10-Q03** F=(1,2)，沿直線從 (0,0) 到 (3,1) 的做功？

4 **B09-C10-Q04** 把上題路徑反過來，結果為何？

5 **B09-C10-Q05** 對 F=(−2y,x)，求 Green 右側的被積函數。

6 **B09-C10-Q06** 上一向量場沿單位正方形逆時針的環流？

7 **B09-C10-Q07** F=(2x,0,z) 的散度，以及穿過單位立方體的外向總通量？

8 **B09-C10-Q08** Stokes 的曲面法向反轉時，邊界如何改？

9 **B09-C10-Q09** 已知一塊開放曲面的法向通量，能直接用散度定理把它當作某立體的總通量嗎？

10 **B09-C10-Q10** 沿正向單位圓，場 F=(x,y) 的做功型積分為何？

10.4 完整解答

Q01

速度恆為 (3,4)，長 5。把 5 從 0 到 1 積得 5；這也是線段長度。

Q02

不會。速度反向但長度不變，標量 f=1 仍沿同一批點累積，所以結果仍為 5。

Q03

γ(t)=(3t,t)，0≤t≤1，內積 (1,2)·(3,1)=5。參數區間長度為 1，所以做功 5。

Q04

速度可寫 (−3,−1)，場不變，內積 −3−2=−5。或用反向線積分變號。

Q05

∂Q/∂x=1、∂P/∂y=−2，差為 3。不能將相減的順序顛倒。

Q06

場是多項式，滿足光滑前提；正方形面積 1，Green 右側積常數 3，故環流 3。順時針則為 −3。

Q07

散度是 2+0+1=3，場在整空間光滑。立方體體積為 1，散度定理給總通量 3。

Q08

反轉曲面法向時，右手規則誘導的邊界方向也反轉，兩邊積分同時變號。以 z=0 的單位圓盤為例，取 F=(−y,x,0)，其旋度為 (0,0,2)。向上法向給逆時針圓周，兩邊積分都是 2π；向下法向給順時針圓周，兩邊都是 −2π。

Q09

不能，散度定理要有封閉邊界。若能補面封閉並滿足光滑條件，須從總通量扣掉補面的通量，並用同一外向規則。

Q10

參數 γ=(cos t,sin t)，F=γ，速度 γ′=(−sin t,cos t)。每點內積都是 −cos t sin t+sin t cos t=0，因此積分為 0。