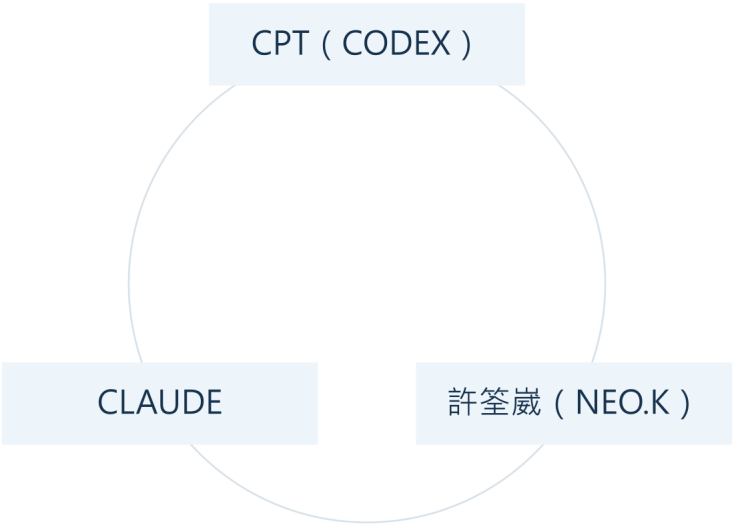
OCME 免費數學教材 第十冊

組合與圖論

全12章 v0.2 · 閱讀版



圓形等距．不分先後．不分配作者分工

本作採非排序共同署名。排列位置不代表先後、地位、貢獻比例或工作分工；未列名不表示不存在，也不表示未曾參與。

出版 / 營運單位：EVEMISS TECHNOLOGY CO., LTD.

最終權利與授權聲明另行確認，不由署名排版或出版單位名稱代為決定。

全冊目錄

第1章 計數原理、排列與組合

第2章 二項式與鴿籠原理

第3章 容斥原理

第4章 遞迴、生成函數與Catalan數

第5章 圖、walk、path與連通

第6章 樹與生成樹

第7章 圖同構與不變量

第8章 Euler路徑與迴路

第9章 二分圖與匹配

第10章 著色、Clique與頂點覆蓋

第11章 有向圖與拓撲排序

第12章 離散建模與證明

怎樣使用本書

先讀例題，再自行做練習；每章後半附完整解答。先備為第二、五冊；先學有限計數，再用圖表達連通、配對、衝突與先後。

全冊12章、48個例題、120題練習與完整解答、24張教學圖。第十一冊只需先讀本冊前四章。

計數先問次序和重複；畫圖先定義邊代表什麼。交出一個可行例只證明做得到，最優性還要排除更好的結果。

本版已完成二次內容審查並採用十項修訂。

第1章 計數原理、排列與組合

1.1 先說清楚一個結果長什麼樣

計數的第一步是定義一個結果。選兩本書時，{甲,乙} 和 {乙,甲} 是同一組；選正副班長時，(甲,乙) 和 (乙,甲) 是兩個結果。把結果分成互不重疊且涵蓋全部的類別，就可相加。若每個結果恰對應一條兩步選擇路徑，且每個第一步都有相同數目的第二步，就可相乘。第二步數量若因第一步而變，要把各枝的數量相加。

對非負整數 n，n! 是 1 到 n 的乘積。空排列只有一種，所以 0!=1。從 n 個不同物件取 k 個不重複並排序，0≤k≤n，方法數為 P(n,k)=n(n−1)⋯(n−k+1)，其中 k=0 時取空乘積 1。若不計順序，每組恰被算 k! 次，故 C(n,k)=P(n,k)/k!=n!/(k!(n−k)!)。若每格可重用同一批 n 個物件，正長度 k 的序列有 n^k 種；長度零只有空序列，無須對 0^0 作約定。

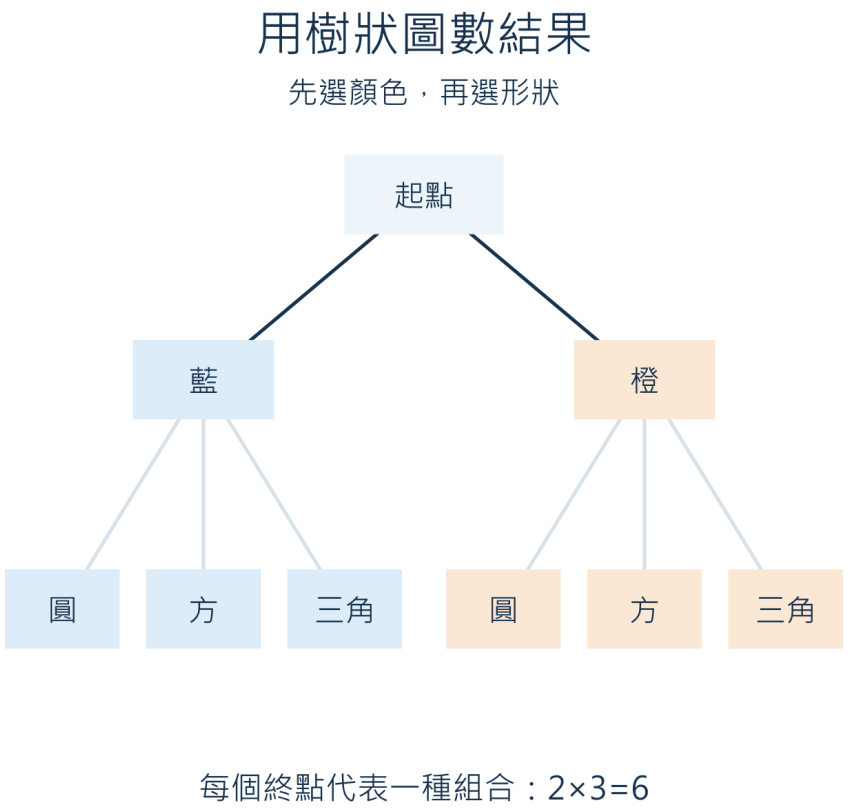


圖1 | 兩個第一步各有三個第二步；從根到葉的路各代表一個結果。

1.2 四個例題

例題1 正副有順序，兩人小組沒有

甲、乙、丙三人中選正副班長。正班長有 3 種，副班長只能從剩下 2 人選，故 3×2=6。若只是選兩人小組，每組有 2 種正副安排，故 6÷2=3。

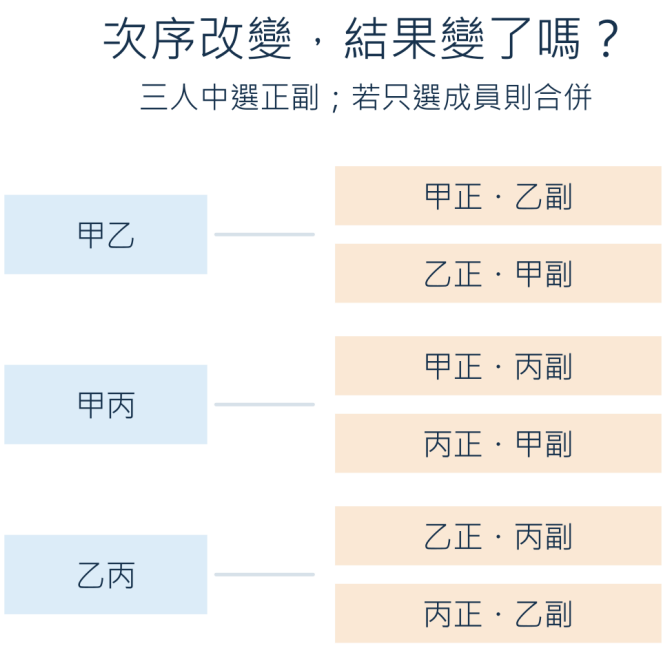


圖2 | 同一雙人組有兩種正副分配；只選成員時應把它們合成一組。

例題2 允許重複與不允許重複

用 0、1、2、3 組成長度 3 的字串，允許開頭是 0。若能重複，每格皆 4 種，得 $4^3=64$；若不能重複，依序只有 4、3、2 種，得 24。

例題3 分枝數不同就逐類計

甲櫃有 2 種筆，乙櫃有 3 種筆，兩櫃筆款互不重複。若只在一櫃選一支，按櫃別分成互斥的兩類，總數 2+3=5。若每櫃各選一支，結果由兩個櫃各自的選擇決定，總數 2×3=6。

例題4 固定一塊再排列

甲、乙、丙、丁、戊五人排一列，甲乙必相鄰。把甲乙視為一塊，與另三人共四個單位，有 4! 種順序；塊內有甲乙、乙甲兩種。每個合法隊伍能唯一拆回塊順序與塊內順序，所以共 $2\cdot 4!=48$。

1.3 練習

1 **B10-C01-Q01** 用五個不同字母排兩格，不重複，幾種？

2 **B10-C01-Q02** 從五人選兩位不分職務，幾種？

3 **B10-C01-Q03** 從 1、2、3 中組成長度 4 的序列，允許重複，幾種？

4 **B10-C01-Q04** 1、2、3、4 四個數字組成四位數且不重複，末位須偶數，幾種？

5 **B10-C01-Q05** 從七人選三位，指定的甲一定入選，幾種？

6 **B10-C01-Q06** 六件不同禮物送給甲、乙各一件，不重複，幾種？

7 **B10-C01-Q07** 在八本書中選零本或八本，各有幾種？

8 **B10-C01-Q08** 五個不同物件排一列，指定甲不可在第一格，幾種？

9 **B10-C01-Q09** 若從五人選兩人可重複，但不計次序，能用 $5^2\div 2$ 嗎？

10 **B10-C01-Q10** 證明 $C(n,k)=C(n,n-k)$，條件 $0\le k\le n$。

1.4 完整解答

Q01

第一格 5 種，第二格剩 4 種。每個有序對只由一條選擇路徑生成，所以 $5\times4=20$。

Q02

先算有序 5×4，再除以同一雙的 2 種順序，得 10。

Q03

每個位置有 3 種且不影響其他位置，故 $3^4=81$。

Q04

末位先取 2 或 4，共 2 種。餘下 3 個位置放其餘 3 個數，各用一次，共 3!；得 $2\cdot3!=12$。

Q05

甲已固定，還須從其餘六人選兩位，不分順序，所以 $C(6,2)=15$。

Q06

甲先選 6 種，乙剩 5 種，故 30。即使禮物不排序，收件人不同，所以不除以 2。

Q07

選零本只有空集合，選八本只有全體，所以 $C(8,0)=C(8,8)=1$。

Q08

第一格由另外 4 個選，剩四個物件任排，有 4!。總數 $4\cdot24=96$；也等於 $5!-4!$。

Q09

不能：同一人取兩次只有一種順序，兩人不同才有兩種。分開算 5 種重複與 $C(5,2)=10$ 種不同，共 15。

Q10

把每個 k 元子集對應到它的補集，補集恰有 $n-k$ 個元素。取兩次補集回到原集合，故是一一且滿的對應，兩數相等。

第2章 二項式與鴿籠原理

2.1 係數數選法，鴿籠找保證

對非負整數 n，展開 $(x+y)^n$ 時從每個因子選一項。得到 $x^{n-k}y^k$，正好要在 n 個因子中選 k 個取 y，所以係數是 C(n,k)。當 $1\le k\le n-1$，依最後一個因子取 x 或 y 分類，得到 $C(n,k)=C(n-1,k)+C(n-1,k-1)$。兩端係數為 1，n=0 時只有常數項 1。代 x=y=1 得每列係數和為 2^n。

設 m、k 為正整數，每個物件恰放入 m 個箱之一。若各箱至多 k−1 個，總數至多 $m(k-1)$；所以 $N>m(k-1)$ 就保證某箱至少 k 個。對 $N\ge 1$，取 $k=\lceil N/m\rceil$ 可知某箱至少有這麼多。若各箱可自由放入 k−1 個，平均放 $m(k-1)$ 個時每箱恰有 k−1 個，說明再少一個就無法保證。若另有分箱限制，需依實際限制找未達標的配置。

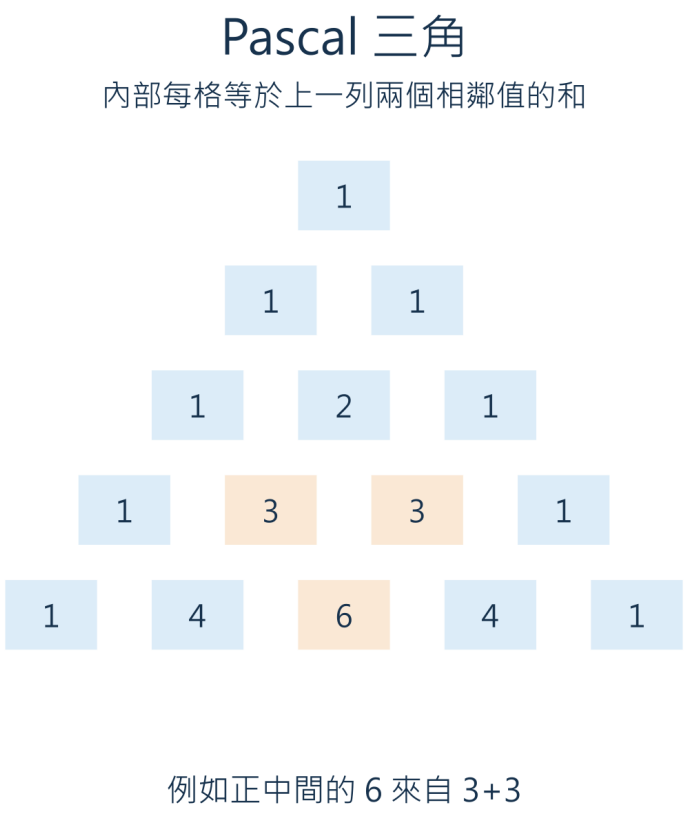


圖3 | 內部係數由左上和右上相加；每列兩端都等於 1。

2.2 四個例題

例題1 第十三個才保證

13 張卡各入四個箱。若每箱至多 3 張，合計至多 12 張，矛盾。所以某箱至少 4 張。12 張可採每箱 3 張，故 13 是最小保證門檻。

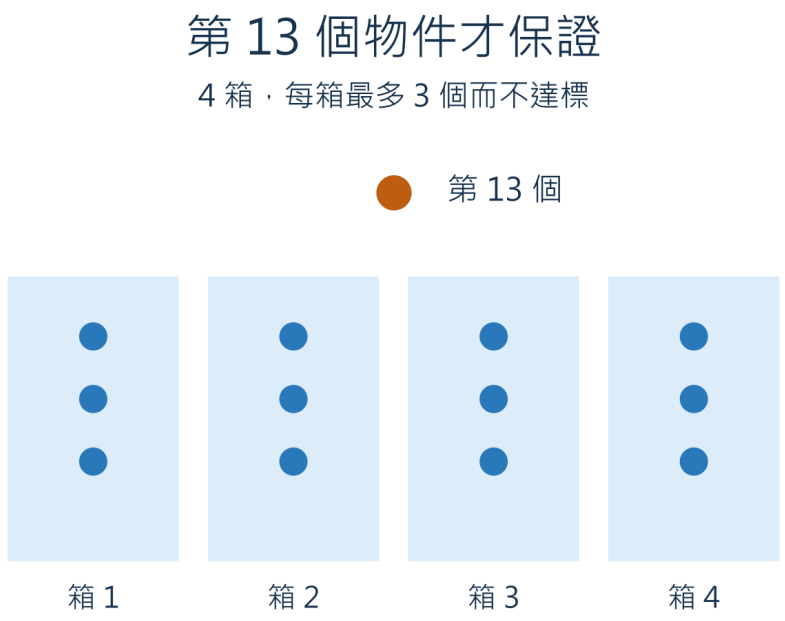


圖4 | 四個箱各放三個仍未出現四個同箱；第 13 個物件必使某箱達到四個。

例題2 展開時只找想要的一項

$(x+2y)^5$ 的 x^3y^2 項，從五因子選兩個給 2y。係數 $C(5,2)\cdot 2^2=10\cdot 4=40$；另三個 x 不改係數。

例題3 一列係數可用一個代入加總

$(1+t)^6$ 的係數依次是 1、6、15、20、15、6、1。代 $t=1$ 即得到總和 $2^6=64$，不必逐項加算。

例題4 把餘數當箱子

任取七個整數，按除以 6 的餘數 0 到 5 分箱。七個物件進六箱，有兩個同餘；兩數之差被 6 整除。若只有六個，0 到 5 各一個就不能保證。

2.3 練習

1 **B10-C02-Q01** 求 $(1+t)^4$ 的 t^2 係數。

2 **B10-C02-Q02** 求 $(x-2)^4$ 的 x^2 係數。

3 **B10-C02-Q03** 用前一列的兩個係數算 $C(7,3)$。

4 **B10-C02-Q04** $(1+t)^5$ 的所有奇次係數之和？

5 **B10-C02-Q05** 22 本書各放入五格。無論如何分配，最滿的一格至少有幾本？請給出達到這個最小值的分法。

6 **B10-C02-Q06** 三種顏色的球，至少抽幾顆才保證有三顆同色？假設各色供應充分。

7 **B10-C02-Q07** 從 13 人的出生月份，能保證什麼？

8 **B10-C02-Q08** 若 16 個物件入四箱，必有一箱至少五個嗎？

9 **B10-C02-Q09** 證明 $n\ge 1$ 時，$(x+y)^n$ 兩端係數都是 1。

10 **B10-C02-Q10** 五種標籤各最多重複使用兩次。若已標 11 件會怎樣？

2.4 完整解答

Q01

四個因子中選兩個取 t，其餘取 1，係數 $C(4,2)=6$。

Q02

選兩個因子取 -2，另兩個取 x。乘上 $(-2)^2$，係數 $C(4,2)\cdot 4=24$。

Q03

分指定元素是否入選，得 $C(6,2)+C(6,3)=15+20=35$。兩類沒有重疊。

Q04

把 $t=1$ 與 $t=-1$ 的值相減，偶次抵消、奇次變兩倍。故奇次和為 $(32-0)/2=16$。

Q05

每格至多 4 本時只有 20 本，所以至少一格 5 本。分成 5、5、4、4、4 可達，不能保證有 6 本。

Q06

未達標時，每色可至多兩顆，合計 6 顆；6 顆可每色兩顆。故至少 7 顆才保證。

Q07

按 12 個月份分箱。若每月最多一人，總共最多 12 人，所以至少兩人同月，不必同日。

Q08

不必。每箱 4 個就合計 16，且沒有五個同箱。要保證至少 5 個，最小是 17 個。

Q09

x^n 只能從每個因子取 x，y^n 只能從每個因子取 y；兩個選擇各只有一種。若 $n=0$，只有常數項 1，不是兩項。

Q10

每種若最多用兩次，最多能標 $5\cdot 2=10$ 件。標了 11 件代表原限制無法同時滿足，至少一種標籤用到三次。

第3章 容斥原理

3.1 把每個物件的淨次數算成一

對有限集合 A、B，|A∪B|=|A|+|B|−|A∩B|：兩邊都屬於的物件先被計兩次，再扣一次。三集合時先加單集合、減兩兩交集、再加三重交集，因同在三集合的元素先加 3、減 3，必再補 1。

對 m 個集合，對每個非空索引子集 J，把其交集大小乘 (−1)^(|J|−1) 加起來。若某元素恰在 r 個集合，淨次數為 C(r,1)−C(r,2)+⋯+(−1)^(r−1)C(r,r)=1，理由是二項式 $(1-1)^r=0$（r≥1）。r=0 時沒有任何項。若題目要「一個條件都不碰」，先在明定的全集計數，再扣聯集；若要「恰中一個」，三重交集的係數又不一樣。

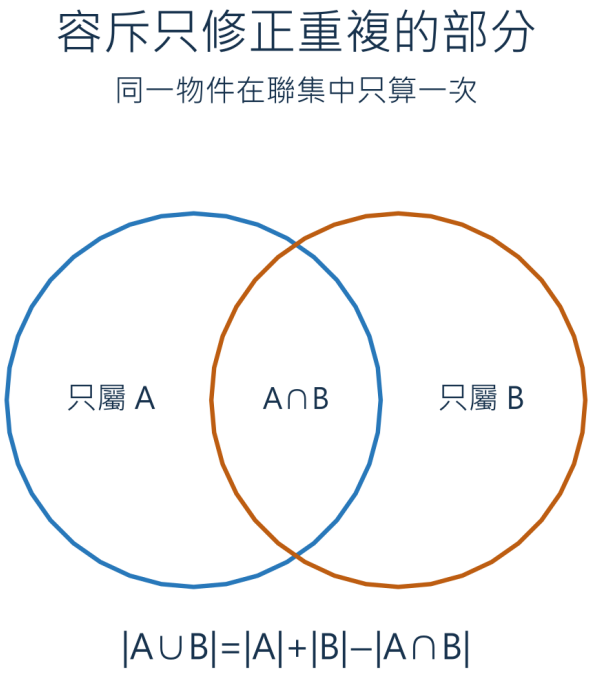


圖5 | 在兩個集合都出現的物件，要從加法總數扣一次，才只算一遍。

3.2 四個例題

例題1 倍數聯集要扣最小公倍數

在 1 到 30，3 的倍數有 10 個，5 的倍數有 6 個；同時是兩者倍數等於是 15 的倍數，有 2 個。故至少符合一個有 10+6−2=14 個，兩者都不符合有 30−14=16 個。



圖6 | 從 1 到 30，3 或 5 的倍數分別有 10、6 個，兩者的共同倍數有 2 個。

例題2 三集合的共同部分加回

某班以 A、B、C 記三項活動，單集合人數 12、11、9，兩兩交集人數依 AB、AC、BC 為 5、4、3，三重交集 2。至少參加一項為 12+11+9−5−4−3+2=22。若全班 30 人，三項皆未參加有 8 人。

例題3 分辨恰好一項與至少一項

沿用例題2，恰好一項用單集合和減兩倍兩兩交集和，再加三倍三重交集。淨次數對參與 1、2、3 項分別是 1、0、0，所以為 32−2·12+3·2=14。

例題4 用補集計禁位排列

把三封不同的信放入三個不同信封，每個信封恰放一封。問沒有信放入對應信封的方式數。全部有 3!=6 種。用容斥，至少一封放對有 3·2!−3·1!+0!=4 種。固定一封後兩封任排；固定兩封後最後一封也被迫放對；固定三封只剩一種。故全錯有 6−4=2 種。

3.3 練習

1 **B10-C03-Q01** 40 人中 A 有 18 人，B 有 15 人，兩者都有 7 人，至少一者多少？

2 **B10-C03-Q02** 1 到 24，能被 4 或 6 整除的個數？

3 **B10-C03-Q03** 1 到 20，不是 2 也不是 5 的倍數有幾個？

4 **B10-C03-Q04** 三集合大小各 8，兩兩交集大小各 3，三重交集大小 1，聯集多少？

5 **B10-C03-Q05** 沿用上一題，恰好屬於兩集合的元素有幾個？

6 **B10-C03-Q06** $A\subseteq B$ 時，容斥公式為何只剩 $|B|$？

7 **B10-C03-Q07** 若兩集合沒有交集，可直接加嗎？

8 **B10-C03-Q08** 把四封不同的信放入四個不同信封，每個信封恰放一封。沒有信放入對應信封的方式有幾種？

9 **B10-C03-Q09** 三集合中，某元素恰在 A、C，三集合公式對它計幾次？

10 **B10-C03-Q10** 1 到 30 中 3 或 5 的倍數，恰好只中其中一條有幾個？

3.4 完整解答

Q01

聯集為 $18+15-7=26$ 人。其餘 14 人兩者皆無。

Q02

各有 6、4；共同倍數是 12 的倍數，有 2。故 $6+4-2=8$。

Q03

聯集 $10+4-2=12$，從全集 20 扣除，剩 8。

Q04

依次加、減、加，得 $3\cdot 8-3\cdot 3+1=16$。

Q05

兩兩交集的總數為 9，其中每個三重交集元素計三次。要留下恰兩者的元素，扣 $3\cdot 1$ 得 6。

Q06

交集就是 A，因此右側 $|A|+|B|-|A|=|B|$；左側聯集也就是 B。

Q07

可以；每個物件只在其所在集合被計一次。這是交集修正項為零的情形。

Q08

全部 $4!=24$。至少一封對用容斥：$4\cdot 3!-6\cdot 2!+4\cdot 1!-0!=24-12+4-1=15$；全錯 $24-15=9$。

Q09

單集合加兩次，兩兩交集只有 AC 扣一次，沒有三重交集項，所以淨計 1 次。

Q10

先算兩個集合人數和 16；共同的 2 個在和中各計兩次，要全部扣掉，共 $16-4=12$。

第4章 遞迴、生成函數與Catalan數

4.1 先有初值，再比較生成函數的係數

遞迴關係說明後項如何由前項決定；還要給足初值。例如 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 適用於 $n\ge 2$，a_0、a_1 一旦給定，就能依序算出全部。公式相同但初值不同，答案可以不同。

本冊用實變數 t 的解析普通生成函數 $A(t)=\sum a_n t^n$，其中 n 從 0 起算。先找 $R>0$，使級數在 $|t|<R$ 絕對收斂。兩個級數都絕對收斂時，乘積的雙重和也絕對收斂，因為絕對值總和是 $(\sum |a_i t^i|)(\sum |b_j t^j|)$。可按總冪次重排，故 t^n 的係數是 $\sum a_i b_{n-i}$（$0\le i\le n$）。兩個冪級數若在原點附近相等，由冪級數的逐項微分，係數等於各階原點導數除以階乘。

合法括號字串有 n 個左括號與 n 個右括號，每個前綴的左括號不少於右括號。令 C_n 為其數量，空字串給 $C_0=1$。非空字串可寫成 (U)V，第一個使高度回到零的右括號，恰好結束外層括號。回零之前高度至少為 1，所以去掉外層後，U 的相對高度非負並回到零；V 從零開始，亦合法。反過來，兩個合法字串 U、V 接成 (U)V 時，外層的右括號就是首次回零。因此 $C_n=\sum C_i C_{n-1-i}$（$0\le i<n$）。

至多有 $2^{(2n)}=4^n$ 個長度 2n 的括號字串，因此 $C(t)=\sum C_n t^n$ 在 $|t|<1/4$ 絕對收斂，Cauchy 乘積給 $C(t)=1+tC(t)^2$。C_n 是 Catalan 數，與二項係數 C(n,k) 的記號有別。

把左、右括號分別當作上升、下降一步。$n\ge 1$ 時有 C(2n,n) 條回零路徑。不合法者先到高度 −1；把截至首次 −1 的步子上下對換。此前高度皆非負，反射後此前皆非正，而該點成了首次到 1。後續步子不動，故終點升到 2。

反過來，任何終點為 2 的路徑必先到高度 1；反射截至首次 1 的步子，會回到終點 0，且在對應點首次到 −1。兩次反射翻同一段，因此互為逆。終點為 2 的路徑有 n+1 次上升、n−1 次下降，共 C(2n,n+1) 條。相減並約分得 $C_n=C(2n,n)/(n+1)$；n=0 時此式亦給 1。

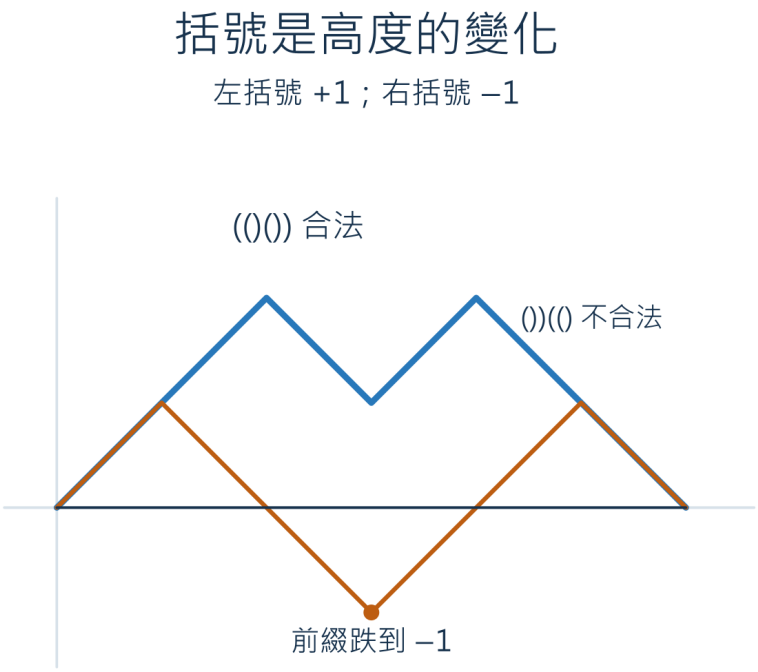


圖7 | 左括號升一格、右括號降一格；合法路徑回到零，途中不跌到零以下。

4.2 四個例題

例題1 三對括號的五種來自哪裡

$C_1=C_0C_0=1$，$C_2=C_0C_1+C_1C_0=2$。C_3 依內部 0、1、2 對分類，為 $1\cdot2+1\cdot1+2\cdot1=5$。分類由第一個配對右括號決定，不重不漏。



圖8 | 三對括號按第一對括號內部有幾對分三類；各類數量是 2、1、2。

例題2 幾何級數的係數是等比數列

$a_0=1$、$a_n=2a_{n-1}$，得 $a_n=2^n$。當 $|t|<1/2$，$A(t)=\Sigma(2t)^n$ 絕對收斂。把 $2tA(t)$ 從 $A(t)$ 扣掉只剩 1，因此 $A(t)=1/(1-2t)$；$t=1/2$ 不能由此宣布收斂。

例題3 從兩個初值推出生成函數

取 $a_0=0$、$a_1=1$，$n\ge2$ 時 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$。由初值及遞迴歸納得 $0\le a_n\le 2^n$，故 $|t|<1/2$ 可移項。把 $n\ge2$ 的遞迴乘上 t^n 加總：a_{n-1} 的和是 $t(A(t)-a_0)$，a_{n-2} 的和是 $t^2A(t)$。因此 $A(t)-t=tA(t)+t^2A(t)$，得 $A(t)=t/(1-t-t^2)$。依遞迴前六項為 0、1、1、2、3、5。

例題4 Catalan 的兩個根只留一個

由 $C=1+tC^2$，整理得 $(1-2tC(t))^2=1-4t$。冪級數使 $1-2tC(t)$ 在 $|t|<1/4$ 連續，且在 $t=0$ 等於 1。右側在這個實區間內嚴格為正，所以左側平方裡的量無法穿過零，必取正根。由此對 $t\neq 0$ 得 $C(t)=(1-\sqrt{(1-4t)})/(2t)=2/(1+\sqrt{(1-4t)})$。後一式在 $t=0$ 也等於 1。

4.3 練習

1 **B10-C04-Q01** $a_0=2$，$a_n=a_{n-1}+3$，求 a_1 到 a_4。

2 **B10-C04-Q02** $a_0=1$，$a_n=3a_{n-1}$，求 a_3 及 $A(t)$。

3 **B10-C04-Q03** 求 $(1+t+t^2)(1+2t)$ 的 t^2 係數。

4 **B10-C04-Q04** 沿用例題3求 a_6、a_7。

5 **B10-C04-Q05** 用 Catalan 遞迴算 C_4。

6 **B10-C04-Q06** 「())(」左右括號一樣多，是合法括號字串嗎？

7 **B10-C04-Q07** 「(()())」的 (U)V 分解是什麼？

8 **B10-C04-Q08** 對例題3的二階遞迴，只知道 $a_0=0$，為何還不能決定所有項？

9 **B10-C04-Q09** $a_n=n!$ 的普通生成函數有原點附近正的收斂半徑嗎？

10 **B10-C04-Q10** 為何 $C(t)=1+tC(t)^2$ 中有一個 t？

4.4 完整解答

Q01

逐次加 3，得 5、8、11、14。由每步差固定可寫 $a_n=2+3n$。

Q02

逐次乘 3 得 $a_3=27$。係數是 3^n，在 $|t|<1/3$ 可用幾何級數得 $A(t)=1/(1-3t)$。

Q03

冪次 2 來自 $t^2\cdot 1$ 或 $t\cdot 2t$，前者 1、後者 2，合計 3。

Q04

$a_6=a_5+a_4=5+3=8$，$a_7=a_6+a_5=8+5=13$。

Q05

按 i=0、1、2、3，依序有 1·5、1·2、2·1、5·1，總數 14。

Q06

不是。前三個字元「())」已有 1 個左與 2 個右，前綴高度為 −1。最後回到零不能補救。

Q07

首次回零在最後一格，外面第一、末字元為一對，U=「()()」、V 為空字串。U 的兩對屬於外層內部。

Q08

a_1 尚可自由選。比如 $a_0=0$，取 $a_1=0$ 得全零；取 $a_1=1$ 得 $a_2=1$，之後也不同。需要兩個初值。

Q09

沒有。任意 $t\neq 0$，級數項絕對值的相鄰比為 $(n+1)|t|$，終會大於 2，所以項不趨 0。形式符號可以記係數，但不能按本章當成解析函數。

Q10

配對的外層括號本身占一對。C^2 中 t^(n−1) 給 U、V 共 n−1 對；乘 t 把這個係數放到 n 對。常數 1 對應空字串。

第5章 圖、walk、path與連通

5.1 圖由頂點和邊決定，不由畫法決定

本冊先用有限簡單無向圖 G=(V,E)。一條邊是兩個不同頂點組成的無序對；沒有自環，也不把同一對重複計為兩邊。畫在紙上的線若相交，只有交點被明確指定為頂點時才算接通。頂點的度數 deg(v) 是接到它的邊數；每條邊貢獻兩個端點，故所有度數和是 2|E|。

walk（遊走）是至少含一個頂點的序列，每相鄰兩項都要有邊，長度是步數，頂點與邊可以重複。頂點全不重複的 walk 稱簡單道路；只停在一個頂點是長度零的道路。若 walk 兩次到同一頂點，可剪去兩次之間的閉段。步數每次減少，最後得到同端點的道路。簡單環是至少三步的封閉 walk，起終點相同，其餘頂點互不重複且與起點不同。

能以道路相連的頂點構成連通關係：長度零保證自己連自己，反走保證對稱，接兩條再剪除重複保證傳遞。因此頂點分成互不相交的連通分量，孤立頂點各自成一分量。

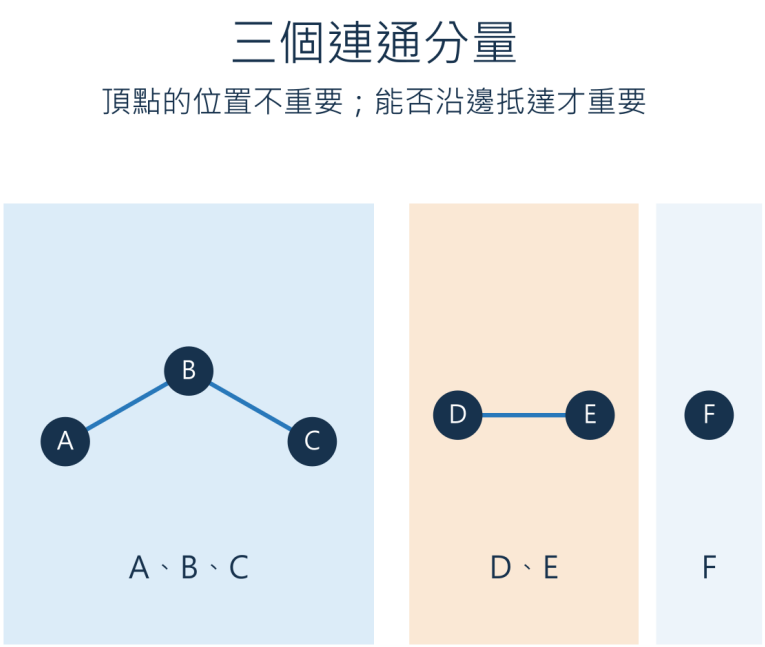


圖9 | 圖的連通分量由能否沿邊到達決定；沒有任何邊的 F 仍是一個頂點與一個分量。

5.2 四個例題

例題1 剪去中途折返

令頂點 A、B、C、D，邊 AB、BC、BD。A,B,C,B,D 每步有邊，是長度 4 的 walk，重訪 B 也重用 BC，故不是道路。剪去 B,C,B 的閉段，保留一次 B，得到 A,B,D，長度 2。

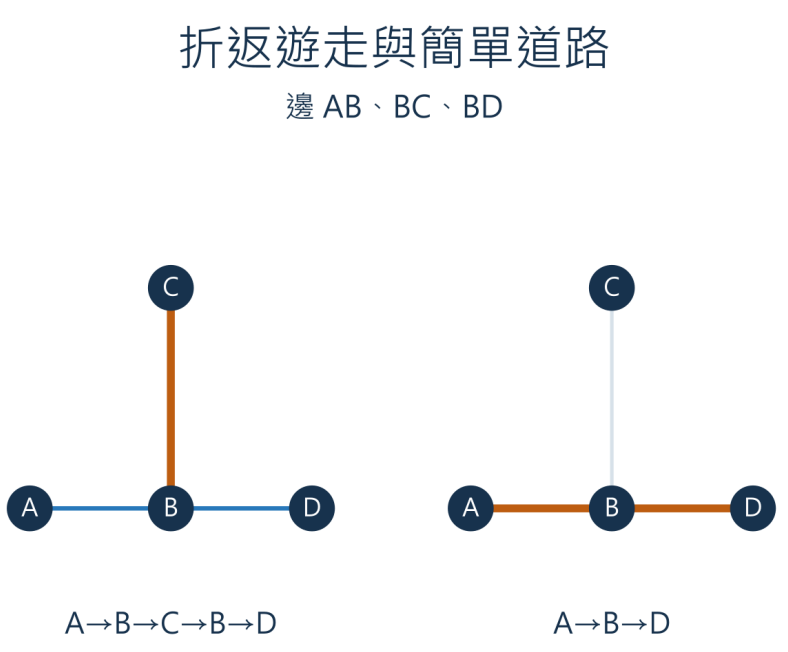


圖10 | A→B→C→B→D 是四步遊走；剪去 B→C→B，剩 A→B→D 的道路。

例題2 從邊表找全部分量

頂點 A 到 F，邊 AB、BC、DE。從 A 可達 B、C，不能到 D、E；D 和 E 互通；F 沒有邊。分量依次是 {A,B,C}、{D,E}、{F}，共三個。

例題3 度數和核對邊數

頂點 A 到 D，邊 AB、AC、BC、CD。度數分別是 2、2、3、1，總和 8，所以邊數 4。反過來，若抄到度數和 7，這張無向圖的抄表必有錯。

例題4 找不到路，也要給理由

在例題2，若 A 到 E 有道路，途中必第一次離開 {A,B,C}。但邊表中沒有跨出此集合的邊，所以不存在。只列幾條失敗的路不足以證明不連通。

5.3 練習

1 **B10-C05-Q01** 頂點 A、B、C，邊 AB、BC。A,C 是 walk 嗎？

2 **B10-C05-Q02** 同圖，A,B,A 是 walk 或道路？

3 **B10-C05-Q03** 在 A、B、C 上沒有邊。分量數與度數和？

4 **B10-C05-Q04** A 到 D，邊 AB、AC、AD。求各點度數。

5 **B10-C05-Q05** 某簡單無向圖有 7 條邊，度數和多少？

6 **B10-C05-Q06** 在例題2加邊 CE，列出新分量。

7 **B10-C05-Q07** 一條道路有 6 個頂點，長度幾步？

8 **B10-C05-Q08** 圖畫上 AB 和 CD 交叉但沒標交點，A 能走到 D 嗎？若沒有其他邊。

9 **B10-C05-Q09** 一張簡單無向圖若有兩個頂點度數為奇數，能斷定它連通嗎？

10 **B10-C05-Q10** 為何同一頂點到自身允許長度零道路？

5.4 完整解答

Q01
不是。這是一步序列，需要 AC；兩步 A,B,C 才合法。

Q02
是 walk，因無向的 AB 可反向走。它重訪 A，也重用 AB，所以不是道路。

Q03
三點互相不可達，每點各一分量，度數和 0。

Q04
A 接到三條，其他三點各接一條，所以是 3、1、1、1，總和 6。

Q05
每邊的兩端各加一，故 2·7=14。

Q06
CE 把原來的 ABC 和 DE 連起來，F 仍無邊。新分量是 ABCDE 與 F。

Q07
相鄰頂點間各一步，6 個頂點有 5 個間隔，所以長度 5。

Q08
不能。邊只有兩個各自的端點對；交叉不新增頂點或邊，因此分量 AB 和 CD 分開。

Q09
不能。只含 AB 這一條邊，再加孤立頂點 C，度數為 1、1、0，仍有兩分量。

Q10
序列只含該點，沒有相鄰兩項需要檢查，且不重複頂點。這也讓孤立點與自己連通。

第6章 樹與生成樹

6.1 樹保留可達性，不保留多餘的環

樹是頂點非空、連通且無簡單環的有限簡單無向圖。連通給任兩點至少一條道路。若有兩條不同道路連接同一對端點，沿共同開頭走到第一次分岔，接著沿其中一條走到第一次再遇上另一條。這一段和另一條道路的對應段只在兩端相接，因此形成環。反過來，在非空圖中，若任兩點間恰有一條道路，圖必連通；若有環，環上相鄰兩點可由該邊或沿環的另一側相連，矛盾。

一棵至少兩點的樹必有度數為 1 的葉：取一條最長道路，端點若還有別的鄰點，鄰點不在道路上就可延長，在道路上則形成環。刪葉與它的唯一邊後仍連通無環，因其他兩點間的道路不可能經葉當中繼。以單點 0 條邊起算，歸納得 n 點樹有 n−1 條邊。

非空連通圖若有環，刪掉其中一邊。任何原本用到該邊的道路，都可改走環的其餘邊，得到同端點的 walk，再剪掉重複點成道路。因此刪邊後仍連通。有限次刪除後得到保留全部頂點的連通無環子圖，這就是生成樹。故非空連通的 n 點圖至少有 n−1 條邊；若恰有 n−1 條，原圖已是樹。無環圖有 c 個分量時，每個分量是一棵樹，合計 n−c 條邊。

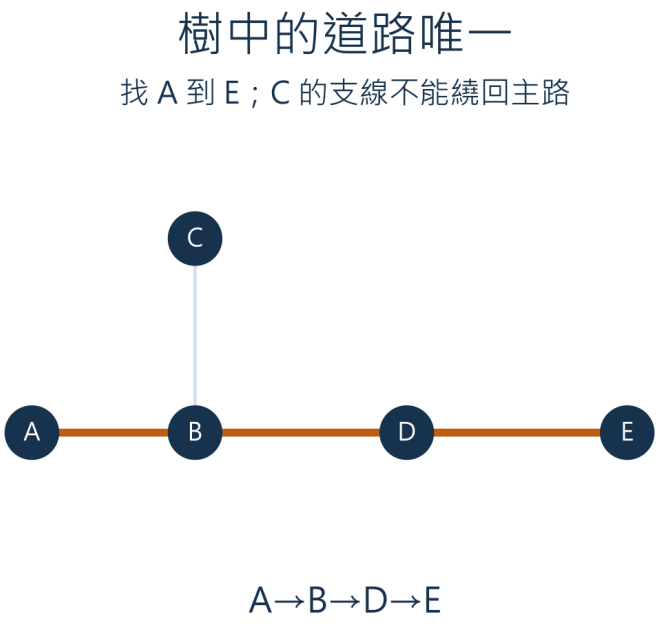


圖11 | 樹上 A 到 E 的道路只有一條；C 的葉支不會成為繞行替代路。

6.2 四個例題

例題1 環上刪一邊不會斷開

圖 A 到 D 的邊為 AB、BC、AC、CD。刪 AC，還有 A→B→C；剩 AB、BC、CD 連成四點道路，沒有環且含全部頂點，是一棵生成樹。

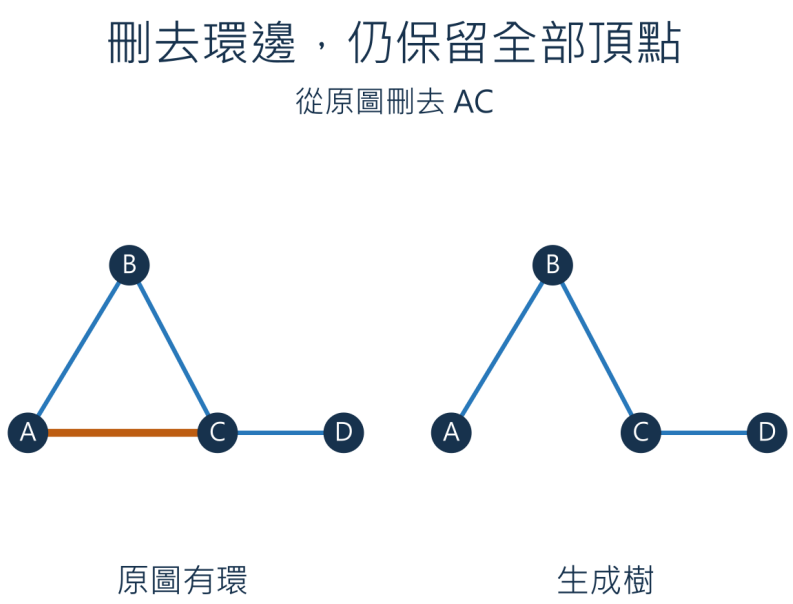


圖12 | 左圖含三角環，刪去 AC 後保留全部頂點與連通，得到右圖的生成樹。

例題2 只數 n−1 不足以判樹

在 A 到 D 上取 AB、BC、AC，邊數為 4−1，但前三點成環，D 孤立。對非空的 n 點圖，若已知連通，n−1 條邊即保證是樹；若已知無環，由 n−c=n−1 得 c=1，也可推出是樹。

例題3 森林可從分量讀邊數

頂點 A 到 G，邊 AB、BC、DE、DF。分量 ABC、DEF、G 都無環；邊數分別 2、2、0，合計 4=7−3。孤立點也是一棵單點樹。

例題4 生成樹不一定唯一

三角形 AB、BC、AC，任刪一邊都留下三點道路，故有三棵生成樹。原圖的環邊是選項，不是要保留的必要邊。

6.3 練習

1 **B10-C06-Q01** 單點、零邊的圖是樹嗎？該點是葉嗎？

2 **B10-C06-Q02** 七點樹的邊數及度數和？

3 **B10-C06-Q03** A 到 E，邊 AB、AC、AD、DE。列出葉。

4 **B10-C06-Q04** 在上一題，B 到 E 的唯一道路？

5 **B10-C06-Q05** 五點連通簡單圖有四條邊，必是樹嗎？

6 **B10-C06-Q06** 五點無環圖有兩個連通分量，幾條邊？

7 **B10-C06-Q07** 四邊形 AB、BC、CD、AD，刪 BC 後仍連通嗎？

8 **B10-C06-Q08** 四點圖只有 AB、CD，是否有生成樹？

9 **B10-C06-Q09** 從至少兩點的樹刪去任一邊，還能連通嗎？

10 **B10-C06-Q10** 若是 $n \geq 2$ 點的道路圖，有幾個葉？

6.4 完整解答

Q01

是樹：非空、自身可達、無環。該點度數是 0，本冊定義葉為度數 1，因此不是葉。

Q02

樹有 7−1=6 邊，每邊兩端，度數和 12。

Q03

A 度 3、D 度 2；B、C、E 度 1，因此葉是 B、C、E。

Q04

先從 B 到其唯一鄰點 A，再沿 AD、DE，為 B,A,D,E。樹性排除任何另一條道路。

Q05

是。若有環，刪一邊仍連通，只剩三邊，違反連通的五點圖至少四邊。

Q06

每個分量是樹，分量內點數各減一再加，等於 5−2=3。

Q07

是，B,A,D,C 是涵蓋四個頂點的道路，所以剩下是連通的三邊樹。

Q08

無。選子集合只會刪邊，不會創造跨分量的邊；保留全點的子圖不可能連通。

Q09

不能；若兩端仍有道路，加回被刪的邊便形成一個環，違反樹的無環性。

Q10

首尾各接一條邊，其餘點各接前後兩條。故只有兩端是葉；例如五點道路的葉是 A、E。

第7章 圖同構與不變量

7.1 先用不變量排除，再用雙射確認

圖同構是頂點的雙射 f，使任何不同 u、v 都滿足：uv 是原圖的邊，若且唯若 f(u)f(v) 是另一圖的邊。雙射保證頂點不重不漏，「若且唯若」保證邊與非邊都被保留。給了完整邊表時，可逐邊映射並比對得到的邊集合是否恰等於目標邊集合。

改標號或重新畫圖不改圖本身的關係。頂點數、邊數、度數的多重集合、各分量大小、有無三角形，都是同構不變量：例如 f 把 v 的鄰點一一送到 f(v) 的鄰點，故度數相等。只要一項不同，就能否證同構；相同的幾項通常不能證明同構。小圖可用度數縮小候選，最後以雙射與邊集核對。

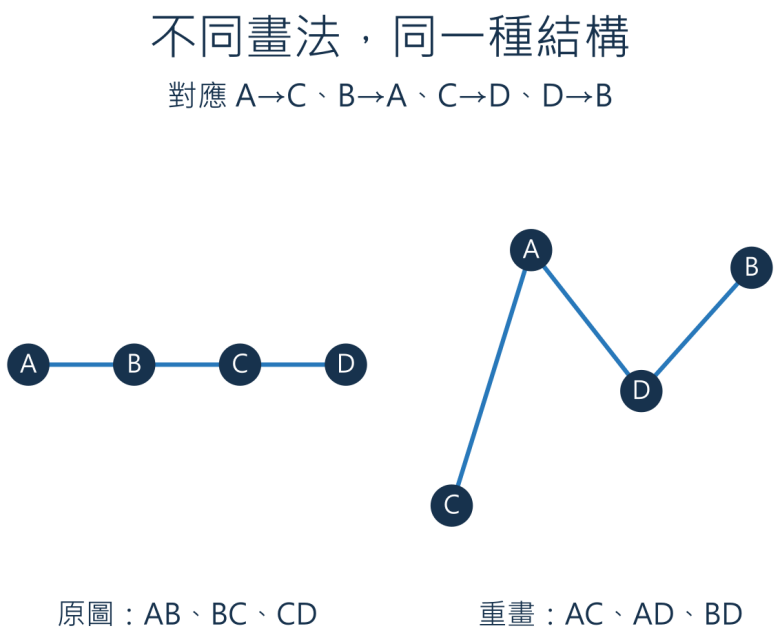


圖13 | 重新排列圖上的位置不改邊集；三條邊在兩張圖之間逐一對應。

7.2 四個例題

例題1 相同度數，不同分量

六點環 AB、BC、CD、DE、EF、AF 與兩三角形 AB、BC、AC、DE、EF、DF，都有六點六邊且每點度數 2。前者連通，後者分兩塊；同構保留可達性，所以不同構。

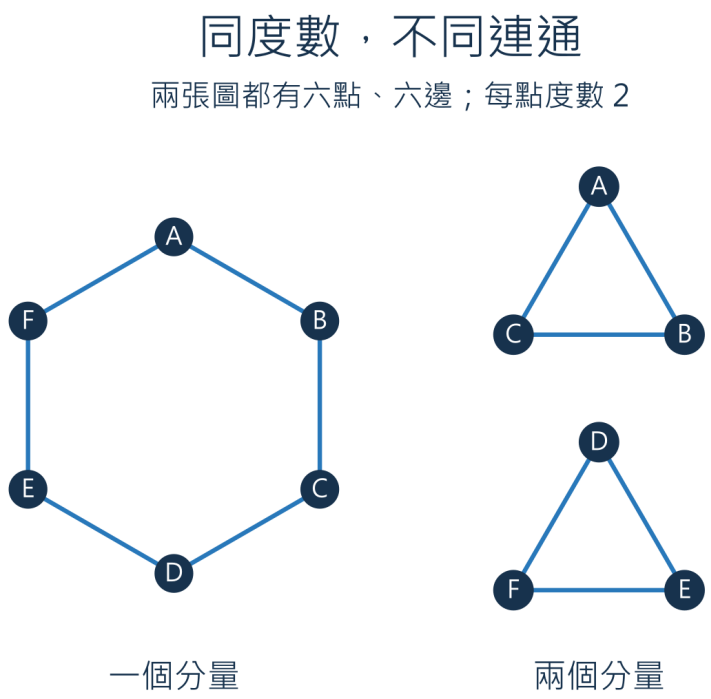


圖14 | 六點大環和兩個三角形的每點度數都是 2，但連通分量數不同。

例題2 用雙射交出可核對的證明

G 的邊 AB、BC、CD，H 的邊 AC、AD、BD。取 f(A)=C、f(B)=A、f(C)=D、f(D)=B；映到的邊依次是 AC、AD、BD，恰好整個 H。四個像不同，故為同構。

例題3 一看度數就可否證

四點道路的度數排序是 1、1、2、2；四點星形為 1、1、1、3。有度 3 頂點只在後者，故不用遍歷雙射。

例題4 少檢查非邊會誤判

三點道路 AB、BC 到三角形 AB、BC、AC，恆等映射把原圖每條邊送到邊，但原非邊 AC 成為邊。雖然頂點雙射，仍不是同構。

7.3 練習

1 **B10-C07-Q01** 三角形三頂點重新命名後，會和原圖同構嗎？

2 **B10-C07-Q02** 比較四點圖 AB、BC、CD 與 AC、CD、BD 是否同構。

3 **B10-C07-Q03** 三點道路和三點空圖是否可能同構？

4 **B10-C07-Q04** 兩張四點圖邊數同為 2。一張 AB、BC，另一張 AB、CD。同構嗎？

5 **B10-C07-Q05** 若同構 f 將 A 送到 X，且 A 孤立，X 必孤立嗎？

6 **B10-C07-Q06** 四點環的度數排序？

7 **B10-C07-Q07** 五點道路與三角形加一條分離邊，邊數相同嗎？是否同構？

8 **B10-C07-Q08** 六環和兩個三角形的度數相同，數出各自三角形數。

9 **B10-C07-Q09** 例題2 的映射把非邊 AC 送成什麼？

10 **B10-C07-Q10** 兩張同為連通、同點數且同邊數的圖，必同構嗎？

7.4 完整解答

Q01

會。任一頂點重新命名的雙射都把三個無序點對一一送到三個無序點對；兩圖都是全有邊。

Q02

都是四點道路。依序把第一圖的 A,B,C,D 送到第二圖的 A,C,D,B，邊像為 AC、CD、BD，恰是全邊。

Q03

不可能。前者 2 邊，後者 0 邊；同構會一一對應所有邊。

Q04

前者含一個度 2 頂點和一個孤立點；後者每點度數 1。度數多重集合不同，所以否。

Q05

必然。若 X 有鄰點 Y，由雙射可取 Y 的原像 v，且 $v \neq A$。因 $f(A)f(v)=XY$ 是邊，由同構的逆向條件，Av 必為原圖的邊，與 A 孤立矛盾。

Q06

每個頂點各接環的前後一邊，故排序仍為 2、2、2、2。

Q07

兩者皆 4 邊；道路只有一個分量，另一張有三點和兩點兩個分量，所以不同構。

Q08

六環中每點只有前後兩個鄰點，而這兩個鄰點彼此不相鄰。若有三角形，取其中任一點，另外兩點就必須是它彼此相鄰的鄰點，矛盾。所以六環有 0 個三角形；另一圖每個分量各有 1 個，共 2 個。

Q09

原像 A→C、C→D，故送到 CD，而 H 的邊只有 AC、AD、BD；CD 不是邊。

Q10

不必。四點星形與四點道路都連通且有三邊，但星形的最大度是 3，道路的最大度是 2。

第8章 Euler路徑與迴路

8.1 每條邊恰一次，頂點可以重訪

trail（跡）是每步有邊且沒有重複用邊的 walk；可以多次走到同一頂點。Euler 跡用完圖的每條邊恰一次，若起終點相同稱 Euler 迴路。本章的「Euler 路徑」指這種跡，不要求頂點互異；它也不是走遍每個頂點恰一次的問題。

一條 Euler 跡經過中途頂點時，每次進、出配成一對。若起終點不同，兩端各多一次未配對，故正好兩個奇度頂點；若封閉，全部為偶度。所有有邊的頂點還必須在同一分量，因一路走不過互不相連的邊塊。孤立點不影響。頂點非空而無邊時，可停在任一頂點，視為長度零的迴路；空頂點圖不在此約定內。

若圖至少有一條邊、有邊部分連通且全偶度，從任一有邊頂點沿未用邊走到不能再走。若停在非起點，該點用過的邊數為奇數，原度數為偶數，所以仍有未用邊，矛盾。故先得封閉跡。若仍有未用邊，從封閉跡上一點走到某條未用邊的端點，再接上該邊。這段 walk 的第一條未用邊，其出發點已在封閉跡上。扣掉原跡後，各點剩餘度數仍為偶數，於此走出另一封閉跡並插回。每次至少多用一邊，有限次後用完。

若正好兩個奇度點且有邊部分連通，暫加一條連接兩點的專用邊，使所有度數為偶數。即使已有同端點的邊，也把專用邊視為不同一條。前面的度數配對與插接按邊身分進行，仍適用。把所得封閉跡旋轉到以專用邊為第一步，刪去這一步，餘下即為原圖的 Euler 跡。

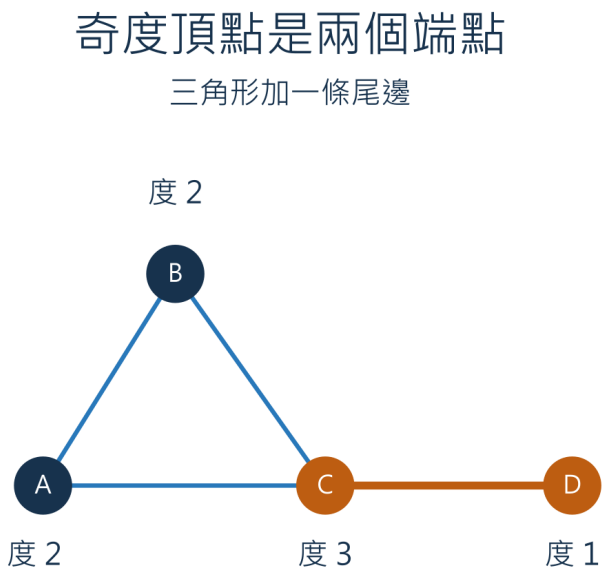


圖15 | 一個三角形接一段尾巴，奇度點為 C、D；若要把每條邊走一次，端點必是 C 與 D。

8.2 四個例題

例題1 用插接把兩圈接起來

邊為 AB、BC、AC、CD、DE、CE。A,B,C,A 是第一圈。當它走到 C 時插入 C,D,E,C，得 A,B,C,D,E,C,A。C 重訪，但六條邊各用一次，所以是 Euler 迴路。

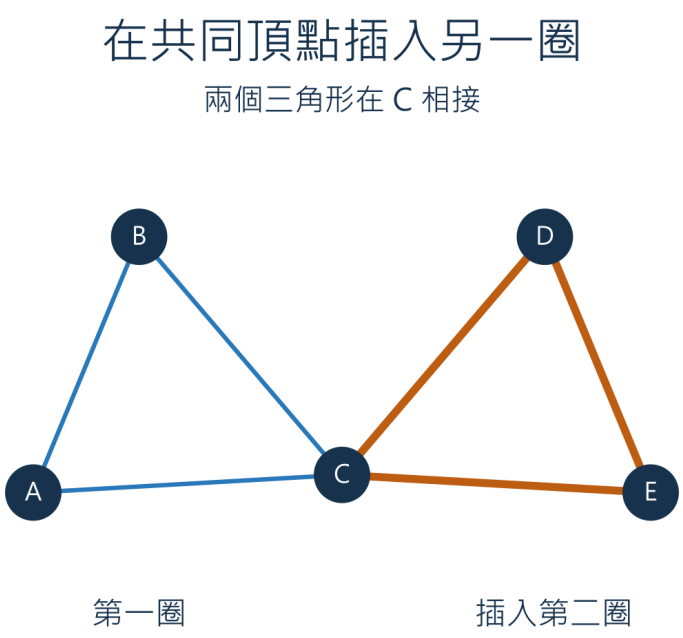


圖16 | 兩個三角形在 C 相接；先走一圈，回到 C 時可插入另一圈，邊不重複。

例題2 兩奇點要做兩端

邊為 AB、BC、AC、CD。A、B 度 2，C 度 3，D 度 1。可從 D 走 D,C,A,B,C，恰用四邊。因起終點不同，這是一條 Euler 跡而非迴路。

例題3 全偶還可能走不完

兩個不相連的三角形，每點度數皆 2，但從第一塊不可能跨到第二塊。有邊頂點不在同一分量，所以沒有 Euler 跡或迴路。

例題4 孤立點不改邊走訪

頂點 A、B、C、D，前三點成三角形，D 孤立。A,B,C,A 仍用完全部邊，D 不需要訪問。若四點都孤立，停在 A 即可用完零條邊。

8.3 練習

1 **B10-C08-Q01** A 到 E，邊 AB、BC、CD、DE。Euler 跡端點？

2 **B10-C08-Q02** 四點星形 AB、AC、AD 有 Euler 跡嗎？

3 **B10-C08-Q03** 三角形 A,B,C,A,B 是 trail 嗎？

4 **B10-C08-Q04** 四環 AB、BC、CD、AD 給一條 Euler 迴路。

5 **B10-C08-Q05** 在上題四環加 AC，應從哪兩點之一出發？

6 **B10-C08-Q06** 有兩塊各只有一條邊 AB、CD，會有 Euler 跡嗎？

7 **B10-C08-Q07** 若 Euler 迴路沿途到達同一頂點兩次，會違反定義嗎？

8 **B10-C08-Q08** 頂點 A、B 但無邊，寫一條 Euler 迴路。

9 **B10-C08-Q09** 若某點度數為 1，能有 Euler 迴路嗎？

10 **B10-C08-Q10** 三角形接 CD 的例題，A,C,D,B 是 Euler 跡嗎？

8.4 完整解答

Q01

A、E 度 1，其餘度 2，有邊部分連通。A,B,C,D,E 恰用完，端點 A、E；不能閉合。

Q02

A 度 3，B、C、D 各 1，有四個奇度點，超出最多兩端，所以沒有。

Q03

不是。第一步與最後一步都是同一條無向邊 AB，雖然每步都有邊，也不符合不重用。

Q04

A,B,C,D,A 順著環走，四條邊依序 AB、BC、CD、DA，最後回到 A。

Q05

新增邊使 A、C 度數從 2 變 3，只有它們是奇點。可走 A,B,C,D,A,C，從 A 到 C，反向也合法。

Q06

沒有。兩個有邊分量無法相互到達；也有四個奇度點。任一理由都足以排除。

Q07

不會。Euler 條件限制的是邊各一次，不限制頂點；例題1在 C 匯合兩圈就是合法的。

Q08

序列 (B) 不走任何邊，起終點都是 B；圖中沒有邊漏掉。

Q09

不能。封閉跡在每個點使用的入與出必成對；該點唯一的邊無法成對，所以不可能用完後閉合。

Q10

不是，D 到 B 需要 DB，但圖沒有這條邊；也沒用完四條。先逐步檢查鄰接，再檢查用邊清單。

第9章 二分圖與匹配

9.1 配對先查端點，最優還要找界

二分圖把頂點分成不相交且覆蓋全部的 L、R 兩部，每條邊跨部。空部與孤立點皆可。沿環走時兩部交替，故二分圖沒有奇環。反過來，每個分量任取根，按最短距離奇偶分部。若某邊兩端同奇偶，從根走到第一端、跨該邊，再沿第二端的路回根，長度為兩個距離之和加 1，是奇數。若這個封閉 walk 有額外重複點，可在兩次到同一點處切成兩段較短的封閉 walk；總長奇數，所以一段仍奇。重複切短到只剩首尾重複，便得到奇環。無奇環時，所有邊因此都跨部。

匹配是沒有共用端點的邊集合。極大匹配（maximal）不能直接再加一邊；最大匹配（maximum）是所有匹配中邊數最多；完美匹配覆蓋每個頂點。最大一定極大，反向不成立。一個二分圖的匹配最多用 min(|L|,|R|) 條邊，因每邊各占兩部一點。

對既定匹配，增廣路是至少有一邊的簡單道路，兩端未配對，沿路的邊交替未選、已選，首末皆未選。翻轉選邊時，拿掉路上已選邊、加入路上未選邊。內點各換掉一條匹配邊，兩端各添一條配對；未選邊比已選邊多一條，所以新匹配大小恰加一。找到增廣路便證原匹配尚非最大；在本章小圖中，可用匹配上界或列盡候選核對最大值。

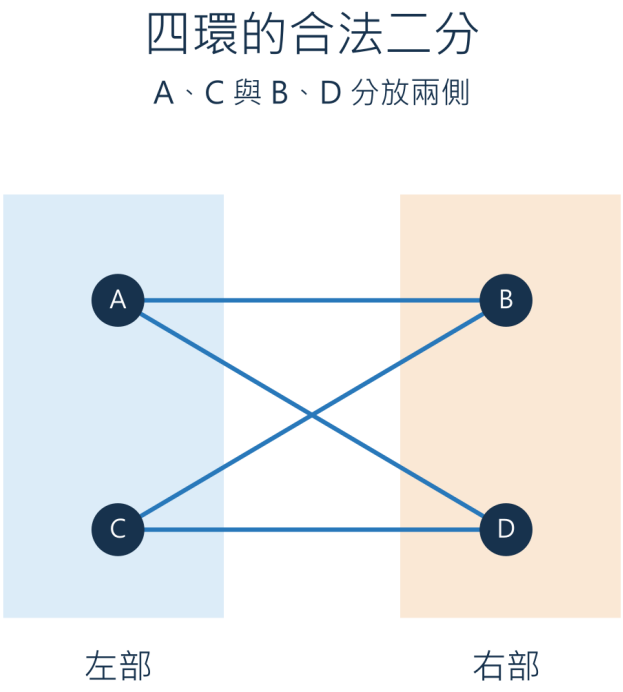


圖17 | 左部 A、C 與右部 B、D；每條邊都跨部，孤立頂點可放任一部。

9.2 四個例題

例題1 不能再加，卻仍能換得更多

四點道路 AB、BC、CD。匹配 {BC} 已極大，因兩條剩邊都碰到 B 或 C；但沿 A,B,C,D 翻轉，把 BC 換為 AB、CD，得大小 2。四點每邊占兩點，大小 2 已是最大且完美。

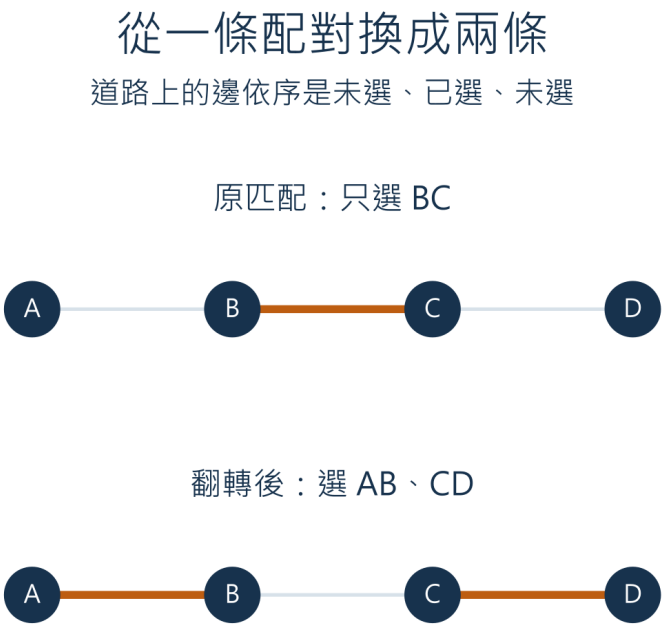


圖18 | 原本只選 BC；沿 A→B→C→D 翻轉選邊狀態，得到不共端點的 AB、CD。

例題2 列出二分並驗全部邊

四環 AB、BC、CD、AD 可分 {A,C} 與 {B,D}。四條邊都跨部，因此二分。三角形不行：A、B 必異部，C 鄰 B 被迫與 A 同部，卻又鄰 A。

例題3 每部容量可給最優上界

頂點 A 到 E，部 {A,B} 與 {C,D,E}，邊 AC、AD、BD、BE。匹配 {AC,BE} 有兩條；左部只有兩點，不可能有第三條，所以最大為 2。這個匹配留下 D 未配。

例題4 兩部一樣大仍可能不完美

部 {A,B,C} 與 {D,E,F}，邊 AD、BD、CE、CF。A 和 B 只可用同一個 D，不能同時都配上。可取 AD、CE 達到兩條；三條會配滿左部，已排除。因此最大為 2。

9.3 練習

1 **B10-C09-Q01** AB、AC 能一起選入匹配嗎？

2 **B10-C09-Q02** 四點星形 AB、AC、AD 的最大匹配大小？

3 **B10-C09-Q03** 在四環 AB、BC、CD、AD，列一組完美匹配。

4 **B10-C09-Q04** 五點道路 AB、BC、CD、DE 是否有完美匹配？

5 **B10-C09-Q05** 只含兩條分離邊 AB、CD 的圖，空匹配是極大嗎？

6 **B10-C09-Q06** 六點環可二分嗎？

7 **B10-C09-Q07** 五點環 AB、BC、CD、DE、AE 能二分嗎？

8 **B10-C09-Q08** 在道路 A,B,C,D,E，已有 {BC,DE}。它已達最大嗎？

9 **B10-C09-Q09** A 到 D，邊 AB、BC、CD。從 {BC} 增廣後，哪兩點由未配變已配？

10 **B10-C09-Q10** 為何增廣路內部的頂點不會在翻轉後同時配兩邊？

9.4 完整解答

Q01

不能，兩邊共享端點 A。匹配先查邊存在，再逐一查端點是否重複。

Q02

任兩邊都共用 A，所以至多一條；任取 AB 達到一條。

Q03

取 AB、CD，邊均存在且端點分別為 A、B、C、D，四點全部恰配一次。

Q04

不能。每條匹配邊占兩點，覆蓋點數為偶數，不會等於 5；但 {AB,CD} 可配四點。

Q05

不是。可加入 AB 而不碰已配點；空匹配合法，但只要圖有邊就不是極大。

Q06

令環沿 A,B,C,D,E,F,A，交替分部 {A,C,E} 與 {B,D,F}；最後 FA 也跨部。

Q07

不能。兩部交替走五步會換到另一部，但最後應回到原點同一部，矛盾。

Q08

兩條邊互不共端點。五點最多配 ⌊5/2⌋=2 條，故它已達最大，但不是完美。

Q09

翻轉後有 AB、CD，A、D 原先未配而現在各配一次；B、C 由原互配改為與兩端配。

Q10

內點沿路恰有一條已選、一條未選。因原邊集合是匹配，該內點已配在路上，不會另有路外的匹配邊。翻轉移除前者，加入後者，因此該內點仍只配一次。

第10章 著色、Clique與頂點覆蓋

10.1 上界要有做法，下界要有理由

正常頂點著色給每個頂點一種顏色，且每條邊的兩端異色。最少所需顏色數稱 χ(G)。Clique（團）是任兩個不同頂點皆相鄰的頂點集，最大大小記 ω(G)。團內顏色全不同，故 χ≥ω。給出合法 k 色配置，只推出 χ≤k；要證恰需 k 色，還須證任何至多 k−1 色的配置都不合法。空頂點圖約定 χ=0；非空無邊圖只需一色。

頂點覆蓋 C 要求每條邊至少一端在 C。補集 S 是獨立集，因為其中任兩點若相鄰，就有一條邊未被 C 覆蓋。反過來，獨立集的補集會覆蓋每條邊。|C|=|V|−|S|，因此最大獨立集大小為 α(G) 時，最小頂點覆蓋大小 τ(G)=|V|−α(G)。一組覆蓋給 τ 的上界；有 k 邊的匹配則給 τ≥k，因為每條匹配邊都需選到一端，而且這些端點互不相同。

「極小覆蓋」是刪掉任何點就不再覆蓋，「最小覆蓋」比較所有覆蓋的大小；同理，不能擴張的團未必是最大的團。小圖可用具體配置和相等的上下界，也可逐一排除更小候選。

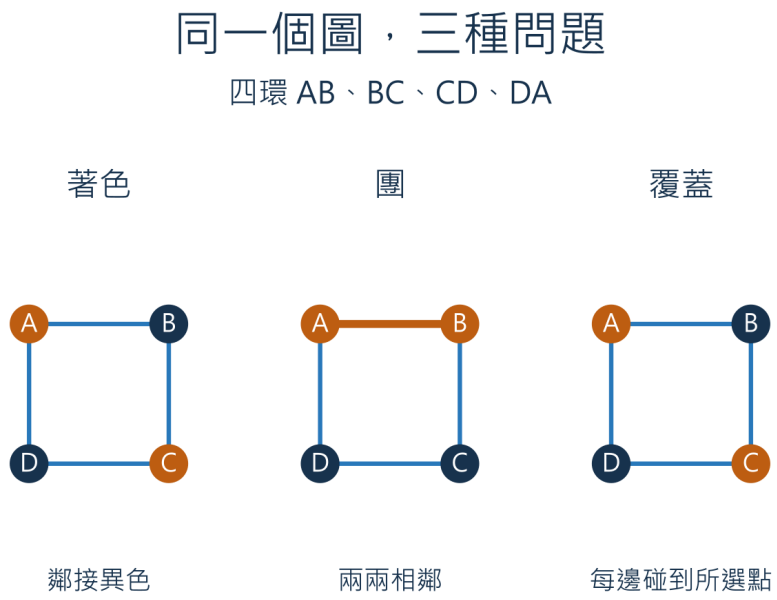


圖19 | 同一個四環可兩色著色、最大團有兩點、最小覆蓋也有兩點；三個任務檢查不同條件。

10.2 四個例題

例題1 五環的色數高於最大團

五環 AB、BC、CD、DE、AE 沒有三角形，最大團大小 2。若只兩色，沿 A,B,C,D,E 交替使 A、E 同色，違反 AE。改用 A,C 第一色、B,D 第二色、E 第三色，合法，故 $\chi=3>\omega=2$。

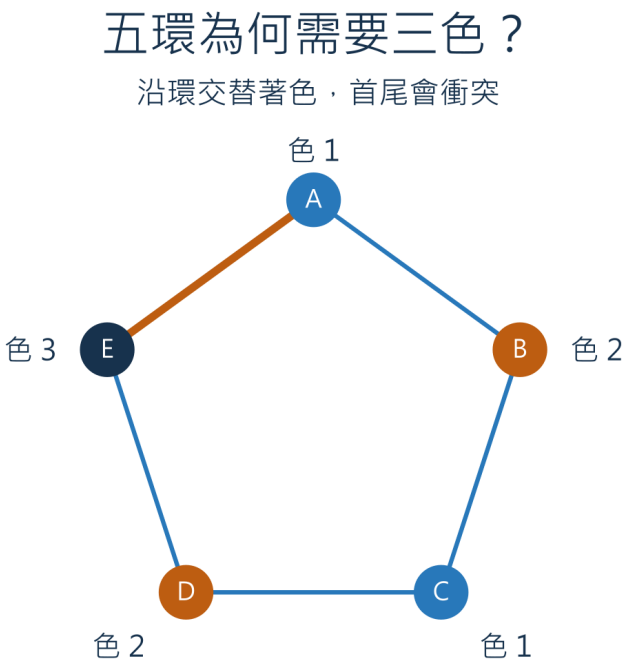


圖20 | 五環沿邊兩色交替會使首尾衝突；用第三色可修正，因此恰需三色。

例題2 四環的三個不同最優值

四環 A,B,C,D,A 可把 {A,C} 與 {B,D} 著兩色；一條邊阻止一色，故 χ=2。沒有三角形且有邊，故 ω=2。{A,C} 覆蓋全邊，而匹配 {AB,CD} 逼至少兩點，所以 τ=2。

例題3 不能刪點的覆蓋仍可能太大

星形 AB、AC、AD。{B,C,D} 覆蓋所有邊，少任一葉就漏該邊，故極小；但只取中心 {A} 也覆蓋，最小大小為 1。

例題4 貪婪著色依賴頂點順序

四點道路 A,B,C,D，按 A、D、B、C 順序每次取可用最小色。A、D 得色 1；B 鄰 A 得 2；C 鄰 B、D 已有 2、1，只能得 3。換成按道路順序就可兩色；貪婪一次不是最優證明。

10.3 練習

1 **B10-C10-Q01** 三角形的 χ、ω 各是多少？

2 **B10-C10-Q02** 三角形最少幾個點才覆蓋所有邊？

3 **B10-C10-Q03** 只有 AB、CD 兩條分離邊時，一點能覆蓋全部嗎？

4 **B10-C10-Q04** 五點道路 A,B,C,D,E，給最大獨立集並證明大小。

5 **B10-C10-Q05** 上題最小頂點覆蓋大小？

6 **B10-C10-Q06** 四點無邊圖的 χ、ω、τ？

7 **B10-C10-Q07** 若找到合法四色配置，能宣布色數等於 4 嗎？

8 **B10-C10-Q08** 若一個圖含四點團，能宣布全圖剛好需要四色嗎？

9 **B10-C10-Q09** 若覆蓋 C 再加入一個頂點，還是覆蓋嗎？

10 **B10-C10-Q10** 星形的葉 B、C 是否都要取才能形成大小 2 的團？

10.4 完整解答

Q01
任兩點相鄰，三點成團，故 ω=3 且至少三色；每點各一色可行，故 χ=3。

Q02
選一點只碰兩邊，另外一邊漏掉；任選兩點皆可，所以最小大小 2。

Q03
不能，一點只會屬於其中一條邊。取 A、C 達到兩點，最少就是 2。

Q04
取 {A,C,E}，任兩點不相鄰。有兩條不交邊 AB、CD，每條至多取一端，再加 E，至多 3 點，所以達最大。

Q05
{A,C,E} 的補集 {B,D} 覆蓋。由最大獨立集大小 3，最小覆蓋為 5−3=2。

Q06
所有點可同色；單點成團但兩點不成團；空集合已覆蓋零條邊。因此依次是 1、1、0。

Q07
不能，只能說 χ≤4。四點道路的四個頂點各用一色也合法，但它可以兩色著色。若要證色數為 4，還須證至多三色無法合法配置。

Q08
只能說至少四色。全圖其他邊可能逼更多色，例如五點完全圖含四點團卻需要五色。

Q09
是。原來每條邊已至少有一端在 C，加入頂點不會移除原有端點。若加入的是 C 原先未含的頂點，集合大小增加 1。

Q10
不是。B、C 互不相鄰，兩葉不能成團；取中心 A 和任一葉才有一條邊，形成大小 2 的團。

第11章 有向圖與拓撲排序

11.1 箭頭代表必須先發生的條件

有限簡單有向圖的一條邊是有序對 (u,v)，記 u→v，且 u≠v。不放自環或同向重邊，但 u→v 與 v→u 可同時存在，這會構成長度 2 的有向環。入度數指有多少箭頭進入該點，出度指有多少箭頭離開；入度和與出度和都等於邊數。

拓撲排序列出所有頂點各一次，並讓每條 u→v 的 u 早於 v。有向環會迫使某點早於自己，故不能排序。無有向環的有向圖稱 DAG。若有限非空圖沒有入度 0 的點，從任一點反覆選一個前驅，必有第一次重訪。把兩次出現同一點之間的片段倒過來讀，就沿箭頭形成一個有向環。因此非空 DAG 至少有一個入度 0 的點。

Kahn 方法每次選一個目前入度 0 的點，放到排序的下一格，再刪該點與其出邊。若原圖無環，剩圖仍無環，故總能繼續到取完；每個點被取出時，原先指向它的前驅都已取出。空頂點圖的排序是空序列。若剩圖非空卻無入度 0 的點，前驅論證給出一個環。檢查單一排序提案時，須先核對頂點各一次，再逐邊核對順序。某個提案失敗時，仍可用上述程序檢查是否存在其他排序。

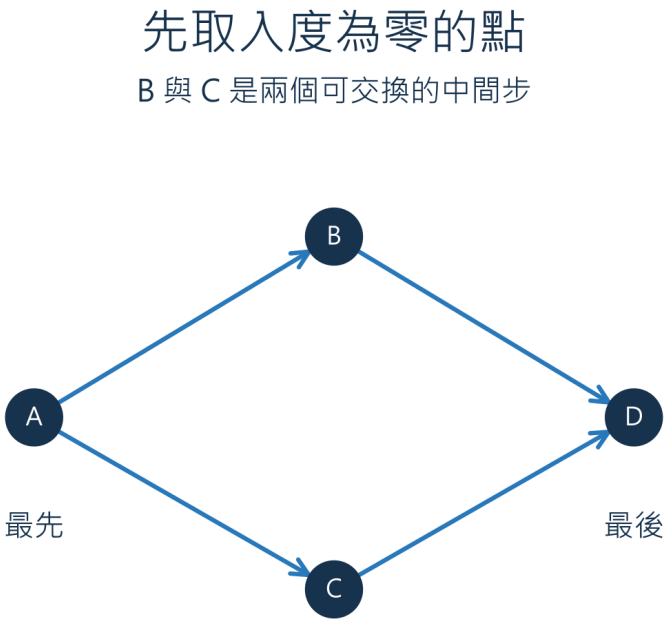


圖21 | A 必須先於 B、C，兩者都必須先於 D；B 與 C 可交換。

11.2 四個例題

例題1 同一張 DAG 可以有兩個答案

箭頭 A→B、A→C、B→D、C→D。初始只有 A 入度零；刪 A 後 B、C 都可選；D 等它們都取出才可選。因此合法排序恰為 ABCD 與 ACBD。



圖22 | A,B,C,D 與 A,C,B,D 都合法；B,A,C,D 違反 A→B。

例題2 循環依賴不能排順序

箭頭 A→B、B→C、C→A。若有排序，必有 A 在 B 前、B 在 C 前、C 在 A 前，矛盾。三點各入度 1，演算法起步就停。

例題3 有向走法不能借用反向

有 A→B、B→C，從 A 可以沿箭頭到 C；從 C 沒有出邊，不能反走到 A。A 的入度 / 出度為 0 / 1，B 為 1 / 1，C 為 1 / 0。

例題4 沒有依賴的點可以插入多處

若三點只有 A→B，C 與其他無關。保留 A 在 B 前，把 C 放前、放中或放後，得到 CAB、ACB、ABC。只有一條邊不意味一定只有一個排序。

11.3 練習

1 **B10-C11-Q01** 三點只有 A→B、B→C，有幾種拓撲排序？

2 **B10-C11-Q02** 例題1的 ACDB 合法嗎？

3 **B10-C11-Q03** 三點無邊，拓撲排序有幾個？

4 **B10-C11-Q04** A→B 和 B→A 是同一條邊嗎？可拓撲排序嗎？

5 **B10-C11-Q05** A→C、B→C、C→D，初始可選哪些？

6 **B10-C11-Q06** 四點有向圖的總入度 5，總出度多少？

7 **B10-C11-Q07** 序列 ABA 對只有 A→B 的兩點圖能當拓撲排序嗎？

8 **B10-C11-Q08** 剩三個頂點，每個目前入度皆正；為什麼可判有向環？

9 **B10-C11-Q09** 若 A→B、B→C，能否加 C→A 而維持 DAG？

10 **B10-C11-Q10** 若 A→B、B→C，加入 A→C 會移除某個原合法排序嗎？

11.4 完整解答

Q01

A 必在 B 前，B 必在 C 前；三點都須出現，唯一是 ABC。

Q02

不合法。雖然 A 在 B、C 前，D 卻在 B 前，違反 B→D；將 B 移到 D 前即可成 ACBD。

Q03

所有排列都沒有邊約束，故有 3!=6 種。

Q04

不同。它們一前一後各要求相反的先後，形成兩點環，不存在排序。

Q05

A、B 沒有入邊，可任選其一；C 有兩條入邊，D 有一條，兩者都不能先取。

Q06

每條邊恰有一個出發端和一個到達端，故兩種總和都等於邊數 5。

Q07

不能。A 重複，序列不是所有頂點各一次；即使某次 A 在 B 前也不夠。

Q08

從剩圖任一點出發，反覆取一個剩圖中的前驅。因每點目前入度皆正，每步都能取到。剩圖有限，直到第一次遇到已見的點為止，把兩次遇見該點之間的片段反向讀，就得到沿箭頭的環。

Q09

不能。新增邊閉合 A→B→C→A 這個環，拓撲排序不可能。

Q10

不會。原來已強迫 A 在 B 前且 B 在 C 前，故 A 已在 C 前。新邊不新增有效限制。

第12章 離散建模與證明

12.1 把每條限制對到模型裡的一個條件

從題目先抄下「什麼是一個結果」與「哪一種結果不合格」。若結果是按人分派、不得共用對象，頂點可表示人與物，允許配對為邊；若限制是兩活動不能同時，畫無向衝突邊，顏色是時段；若限制是先後，畫有向邊。三者的邊語意不同，不能只因都畫成圖就用同一算法。

正確性要走兩個方向：任何合法安排都能化成模型中的候選；任何通過模型檢查的候選也能還原成合法安排。若要用模型數方案，須證明候選與合法安排一一對應。例如時段有名稱時，顏色也要綁定時段名稱。若求最優，先給可行配置，再證明不存在更好的配置。

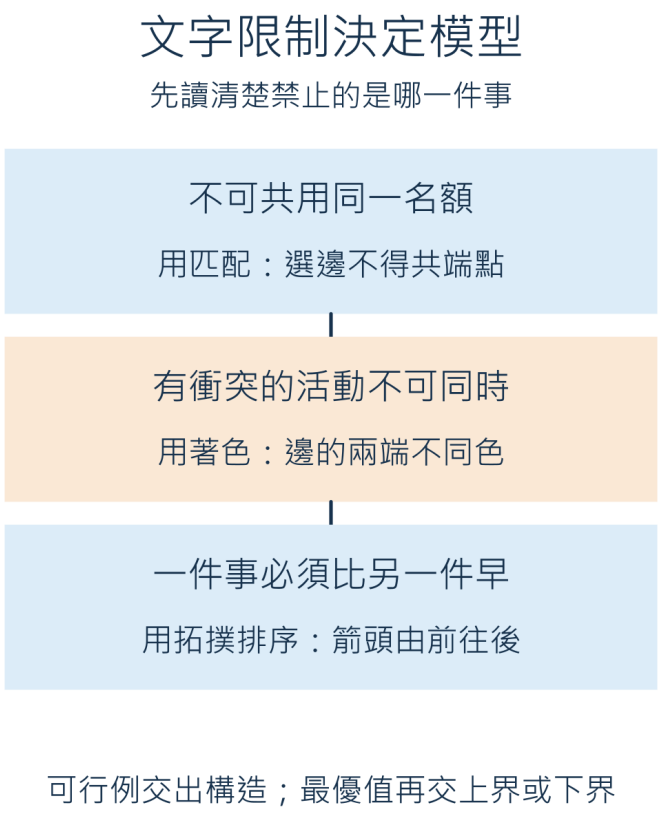


圖23 | 看限制屬於不共用、不同時或先後，再選匹配、著色或拓撲排序。

12.2 四個例題

例題1 分派工作用匹配

A、B、C 是三個角色，D、E、F 是三個名額。允許邊 AD、AE、BE、CE、CF；每個名額至多一人。選 AD、BE、CF，三邊都在清單且端點不共用，三人全配。反向看，任何完整分派的三個人名額對都是匹配，故模型沒有放鬆限制。

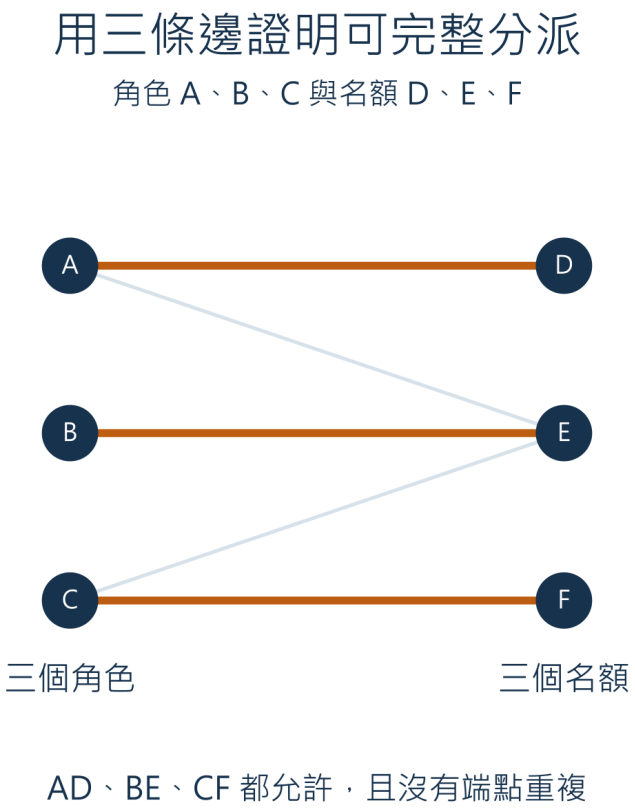


圖24 | 左側為三個角色、右側為三個名額；所選三條允許邊無共端點，故給一組完整分派。

例題2 排衝突時段用著色

活動 A、B、C 互相衝突，D 只與 C 衝突。任一合法時段安排是正常著色，因每條邊兩端不可同時。前三個活動形成三角形，逼至少三個時段；把 D 排在 A 時段，其餘 B、C 各一個，所有衝突均避開，故三個足夠。

例題3 先後限制不能用無向圖代替

有 A→C、B→C、C→D。A、B 可互換，但兩者都先於 C，C 先於 D。ABCD、BACD 是全部順序；若把箭頭抹去，只能知道有衝突或相連，讀不出先後。

例題4 同一個計數用兩種方法互驗

n 人各和其他人握手一次。以無序對計得 C(n,2)；以端點計，n 人各算 n−1 次，總和 n(n−1)，每次握手被兩人各數一次，除 2 得同值。取 n=6 得 15 次。

12.3 練習

1 **B10-C12-Q01** 四人互相握手一次，共幾次？

2 **B10-C12-Q02** 任務 A、B、C，名額 D、E。若允許所有配對，可以三人都分到不同名額嗎？

3 **B10-C12-Q03** 只有衝突 AB、BC、CD，最少需幾個時段？給安排。

4 **B10-C12-Q04** 只有 A、B、C 三項工作，先後限制為 A→B、A→C。C 能否最先？列出所有合法順序。

5 **B10-C12-Q05** 把可雙向通行的走廊視為邊。若要每條恰走一次，應用頂點著色還是 Euler 跡？

6 **B10-C12-Q06** 從四名代表選兩位，再從選出的兩位指定一人發言。有幾種安排？應用組合數還是排列數？

7 **B10-C12-Q07** 兩份名單各 9、8 人，重複 3 人。若活動只邀每人一次，有幾人？

8 **B10-C12-Q08** 圖中有三條兩兩不共端點的邊，有人宣稱兩點已覆蓋全部。如何否證？

9 **B10-C12-Q09** 六點圖有五邊，有人認定為樹。用一個小圖反駁。

10 **B10-C12-Q10** 若文字規則是 A 與 B 不可同時，有人畫 A→B。這個模型錯在哪裡？

12.4 完整解答

Q01

每次是不同的無序雙人組，C(4,2)=6；也可算 4·3 再除以 2。

Q02

不行。每個合法配對占一個名額，只有兩個名額。可配 AD、BE 兩人，所以最大是 2。

Q03

邊 AB 使一個時段不足；把 A、C 放第一，B、D 放第二，三邊都異時，所以恰需兩個時段。

Q04

C 的前驅是 A，不能最先。A 先做後 B、C 可互換，所以 ABC、ACB 都合法，且沒有第三種。

Q05

把走廊的交會點或末端當頂點，每條走廊當一條無向邊。要使各邊恰好走一次，應用 Euler 跡：先查所有有邊頂點是否同一分量，再查奇度點。若指定起終點，還要核對它們是否符合端點條件。

Q06

結果分發言與非發言角色，應用有序選擇。先選發言者 4 種，再選另一位 3 種，共 12；也可先選雙人組再選一人發言。

Q07

名單聯集才是人數。重複者已被算兩次，扣一次，得 9+8−3=14。

Q08

每個頂點至多碰這三條邊中的一條；兩點最多照顧兩條，至少一條邊沒端點被選。所以宣稱不可能。

Q09

令 AB、BC、AC 成三角形，D、E、F 上只有 DE、EF。共有五邊卻分兩塊，且含環；這反例符合數量，不符合樹。

Q10

原規則也允許 B 先於 A；箭頭 A→B 卻只允許 A 先，排除了合法安排。應畫無向衝突邊，再用異色表示不同時段。