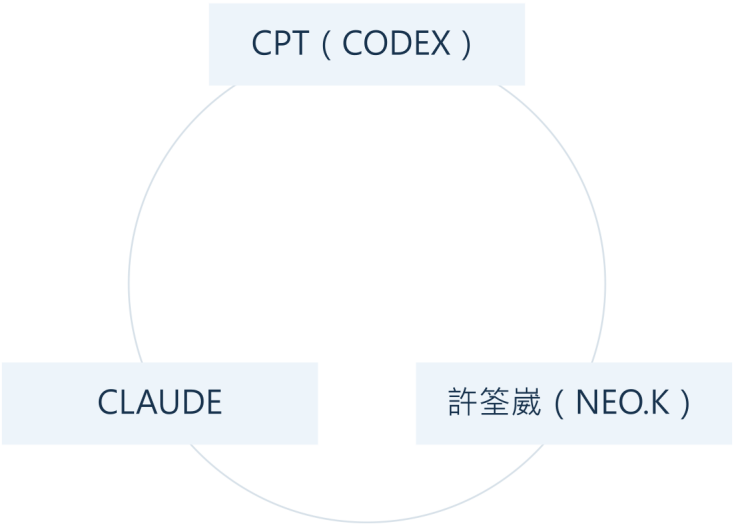
OCME 免費數學教材 第十一冊

機率入門

全12章閱讀版 v0.2 · 本地閱讀版



圓形等距．不分先後．不分配作者分工

本作採非排序共同署名。排列位置不代表先後、地位、貢獻比例或工作分工；未列名不表示不存在，也不表示未曾參與。

出版 / 營運單位：EVEMISS TECHNOLOGY CO., LTD.

最終權利與授權聲明另行確認，不由署名排版或出版單位名稱代為決定。

全冊目錄

第1章 樣本空間與事件

第2章 有限機率與計數

第3章 條件機率與貝氏公式

第4章 事件獨立

第5章 隨機變數與離散分布

第6章 期望與加權平均

第7章 變異數與標準差

第8章 聯合分布與協方差

第9章 條件期望與總量公式

第10章 常見離散模型

第11章 分布函數與常態初識

第12章 IID與極限定理導讀

怎樣使用本書

先讀例題，再自行做練習；每章後半附完整解答。先讀第四、五冊；計數回看第十冊前三章，密度面積回看第七冊的定積分與基本定理。

全冊12章、48個例題、120題練習與完整解答、24張教學圖。由抽樣規則起步，再看分布、期望與極限定理。

每題先辨認等可能、條件機率與獨立性的前提；遇到常態近似，別把近似寫成有限樣本的恆等式。

本版已完成二次基本審查並採用兩項修訂。

第1章 樣本空間與事件

1.1 先列可能結果，再給機率

樣本空間 Ω 是基本結果的集合。每次試驗只落在其中一個基本結果；事件 A 是一些結果的集合，結果落入 A 才叫 A 發生。同一情境可以用不同粒度記錄：擲兩次硬幣可記「哪一次是正面」，也可只記「正面總數」。後者只有三個結果，卻不因此變成三個結果等可能。

本章採非空有限 Ω，允許任一子集作事件。在每個結果 s 放非負權重 w(s)，要求所有權重加起來是 1；事件的機率 P(A) 是其內權重之和。於是 P(∅)=0、P(Ω)=1。把 Ω 分成互不重疊且合起來為 Ω 的區塊，叫作分割；區塊機率之和也為 1。一般機率模型不一定有限，本冊先用這種可以把全部權重寫清楚的模型。

A∩B 是同時發生，A∪B 是至少一個發生，A^c 是在 Ω 裡但不在 A。A 和 A^c 分割 Ω，所以 $P(A^c)=1-P(A)$。若把 P(A)、P(B) 相加，交集被算兩次，扣回一次可得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。只有交集機率為零時，兩個機率才能直接相加。非空事件可以有零機率；空集合和零機率事件不是同一個概念。



圖1 | 四個有序結果分成四格，兩項事件在雙正面的那一格重疊。

1.2 四個例題

例題1 三種顏色不必等可能

轉盤只記錄紅、藍、綠。因扇面大小不同，模型給權重 1/2、1/3、1/6。三者和為 1，且無負值。事件「不是紅」由藍、綠組成，P=1/3+1/6=1/2；若拿兩種顏色除以三種，等於偷偷把扇面改成等大。

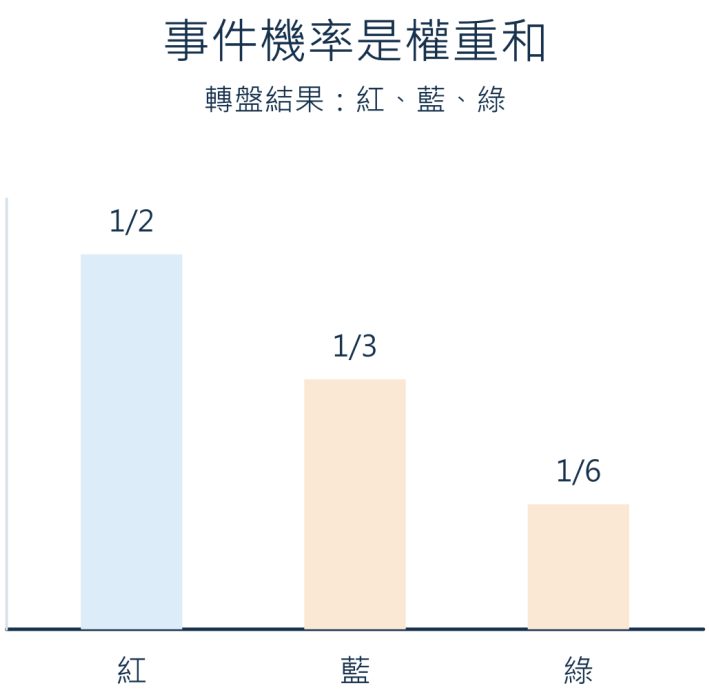


圖2 | 三種基本結果的柱高表示權重；藍與綠合成事件，機率是兩個柱高相加。

例題2 有序結果和計數結果

連擲兩次公平且獨立的硬幣，四個有序結果各重 1/4。把 HT 和 TH 都映到「一個正面」，故正面總數 0、1、2 的權重分別為 1/4、1/2、1/4。有序結果等可能，不表示合併後的結果也等可能。

例題3 交集需要扣一次

公平六面骰記點數。A={2,4,6} 是偶數，B={4,5,6} 是至少 4。交集 {4,6} 有 2 個，故 $P(A\cup B)=3/6+3/6-2/6=2/3$；直接列聯集 {2,4,5,6} 也得 4/6。

例題4 非空與正機率不同

模型 Ω={晴、陰、雨}，權重為 3/4、1/4、0。「雨」事件非空，但在這個模型中機率是 0；「不是雨」機率是 1，但集合不是整個 Ω。這兩個判斷都依模型權重，不依集合大小。

1.3 練習

1 **B11-C01-Q01** 公平骰連擲兩次時，(1,2) 和 (2,1) 是否是同一個有序結果？

2 **B11-C01-Q02** 三個結果的權重為 1/5、1/5、3/5，求第一個或第三個的機率。

3 **B11-C01-Q03** 權重 1/2、1/3、1/3 是合法的分配嗎？

4 **B11-C01-Q04** 公平骰的事件 A 為「小於 3」，求 $P(A^c)$。

5 **B11-C01-Q05** $P(A)=1/2$、$P(B)=1/3$、$P(A\cap B)=1/6$，求兩事件皆不發生的機率。

6 **B11-C01-Q06** $A\subseteq B$ 時，為什麼 $P(A)\le P(B)$？

7 **B11-C01-Q07** 已知四個互斥且窮盡的事件機率有三個是 1/8、1/4、3/8，求第四個。

8 **B11-C01-Q08** 若 $P(A\cup B)=1$、$P(A)=3/5$、$P(B)=4/5$，求交集機率。

9 **B11-C01-Q09** 公平骰中，{1,2}、{2,3}、{4,5,6} 三組形成分割嗎？

10 **B11-C01-Q10** 構造一個 $P(A)=1$ 但 $A\neq\Omega$ 的有限模型。

1.4 完整解答

Q01

不相同。第一座標記第一次，第二座標記第二次；交換座標會使兩次結果互換。若只記點數和，兩者才合併為和值 3。

Q02

兩項結果互不重疊，故把它們的權重相加：1/5+3/5=4/5。

Q03

不合法。雖然都非負，但加起來是 7/6，不是 1；當作 Ω 的權重會令 P(Ω)>1。

Q04

A={1,2}，P(A)=2/6=1/3。補集含 3、4、5、6，機率是 1−1/3=2/3。

Q05

先求聯集：1/2+1/3−1/6=2/3。兩者都不發生是聯集的補集，機率為 1/3。

Q06

B 可拆成 A 和 B 中不在 A 的結果，兩部分互斥。第二部分的權重和非負，所以 P(B) 不小於 P(A)。

Q07

這四個事件分割整個空間，機率和為 1。扣去已知三項 1/8+1/4+3/8=3/4，第四項是 1/4。

Q08

由聯集公式移項，P(A∩B)=3/5+4/5−1=2/5。聯集機率為 1，不表示兩事件互斥。

Q09

不形成。它們的聯集雖涵蓋六點，但前兩組共含結果 2，不符合分割的互斥要求。

Q10

取 Ω={a,b}，權重 w(a)=1、w(b)=0。令 A={a}，它少了 b 而不是整個 Ω，但其權重和確實為 1。

第2章 有限機率與計數

2.1 分子與分母用同一種結果

只有有限樣本空間的基本結果都等可能時，才有 P(A)=|A|/|Ω|。先說清楚什麼算一個結果，再用第十冊的排列與組合計數。有序抽法若每條長度相同的路徑都等可能，可以在有序樣本上數；若每個無序組合由同樣多個有序結果合併，也可以改用無序組合。不能用「無序的成功數」除以「有序的總數」。

均勻不放回地從 N 件不同物品抽 n 件，每次在剩下的物品中等機率選一件。每個有序結果機率都是 1/N·1/(N−1)⋯1/(N−n+1)，忽略順序後，每個 n 件組合都集合了 n! 個這種結果，所以仍等可能。若其中 K 件符合條件，恰好取 k 件符合的機率為 C(K,k)C(N−K,n−k)/C(N,n)，其中 k 必須在兩組的可取範圍內；超出範圍為零。放回抽樣若每次獨立且等機率，則每次仍有同樣的 N 個選擇。

「至少一個」可用補集計數：「一個也沒有」往往較容易數。若要數 A∪B 而兩條件重疊，使用第 1 章的容斥，以免重算交集。

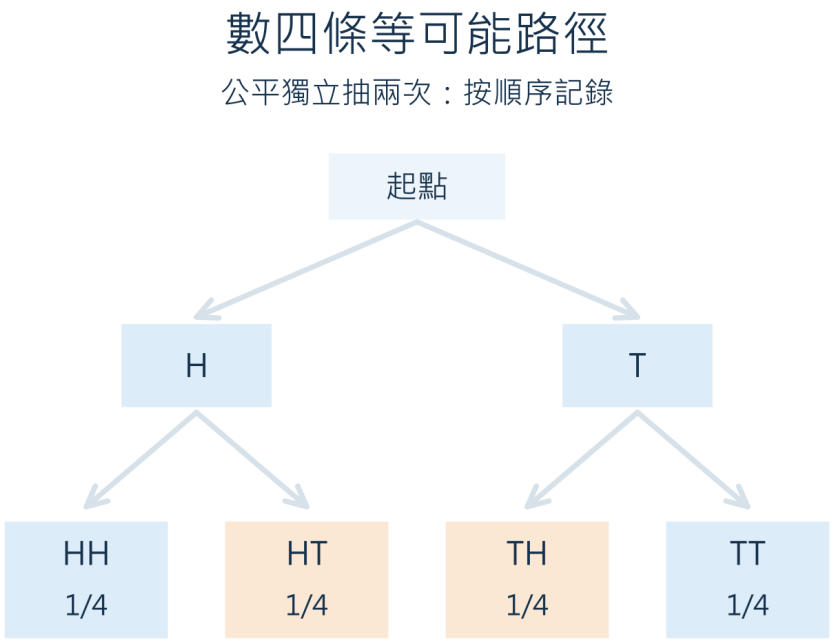


圖3 | 二選一獨立重複兩次，四條有序路徑等可能；恰一正面有兩條。

2.2 四個例題

例題1 比較放回與不放回

袋中有 3 紅、2 藍的不同球，每次從當下袋中均勻抽。放回且兩次獨立時，雙紅機率是 $(3/5)^2=9/25$；不放回時，第一紅後只剩 2 紅 2 藍，雙紅是 $(3/5)(2/4)=3/10$。也可用不放回的無序組合 $C(3,2)/C(5,2)=3/10$。



圖4 | 從 3 紅 2 藍抽兩次；看到紅之後，不放回時剩 2 紅 2 藍，放回時仍是 3 紅 2 藍。

例題2 分兩類選出恰好兩件

八件用品中三件是新款，均勻不放回抽三件。恰好兩件新款有 C(3,2)C(5,1)=15 組；總共有 C(8,3)=56 組，所以機率 15/56。每一組都數一次，新舊之間不再乘排列數。

例題3 先找唯一一種失敗

四次獨立公平擲硬幣，至少一個正面。等可能有序結果有 $2^4=16$ 個；只有 TTTT 失敗，故機率 $1-(1/2)^4=15/16$。

例題4 和值不等可能，回到有序結果

擲兩顆公平獨立骰，有序點對共 36 個。和值 7 有 (1,6) 到 (6,1) 六個，所以 P=1/6；和值 2 僅 (1,1)，P=1/36。不是對 2 到 12 共十一個和值給相同權重。

2.3 練習

1 **B11-C02-Q01** 公平獨立的兩骰，有序結果總數及至少一骰為 6 的機率？

2 **B11-C02-Q02** 從 4 件不同物品均勻取 2 件不放回，有多少無序組合？

3 **B11-C02-Q03** 3 紅 2 藍不放回抽二，恰一紅的機率？

4 **B11-C02-Q04** 同一袋改成放回且獨立，恰一紅的機率？

5 **B11-C02-Q05** 從 7 人中均勻選 3 人，4 人有某資格。全有資格的機率？

6 **B11-C02-Q06** 三次獨立公平擲硬幣，恰二正面的機率？

7 **B11-C02-Q07** 兩顆公平獨立骰，和值為 10 的機率？

8 **B11-C02-Q08** 公平骰的結果為「是偶數或者至少 5」，機率？

9 **B11-C02-Q09** 同樣是「至少一次」，哪個條件讓「全失敗機率為 $(1-p)^n$」成立？

10 **B11-C02-Q10** 為什麼不同大小的五個轉盤區塊，不一定可用有利區塊數除以五？

2.4 完整解答

Q01

總數 6×6=36；沒有任何 6 有 5×5=25 個結果，故所求為 (36−25)/36=11/36。

Q02

先數有序的 4×3=12 個結果。每一組有兩種順序，合併後有 12/2=6 組，也就是 C(4,2)。

Q03

有 C(3,1)C(2,1)=6 個無序組合符合，總數 C(5,2)=10 組，機率 6/10=3/5。

Q04

紅藍、藍紅是互斥的有序結果；兩條機率皆 (3/5)(2/5)=6/25，故合計 12/25。

Q05

三名都從有資格的四人中選，有 C(4,3)=4 組；所有三人組有 C(7,3)=35 組，故機率 4/35。

Q06

選兩個放正面的座標有 C(3,2)=3 種；有序結果共 $2^3=8$ 個，各等可能，故 3/8。

Q07

符合的是 (4,6)、(5,5)、(6,4)，共三個等可能有序點對，故 P=3/36=1/12。

Q08

偶數有 2、4、6，至少5有 5、6。兩條件各數一次會重算 6，修正後共 3+2−1=4 個，得 2/3。

Q09

若每次成功率為同一個 p 且試驗相互獨立，全失敗才可直接乘每次失敗率得到 $(1-p)^n$。補集關係本身不需獨立，但這個乘積推導需要。

Q10

除以五等於替每區指定 1/5。若轉動角度在一圈內均勻、區塊角度不同，各區機率取決於其角度占比；數幾區不能替代加權。

第3章 條件機率與貝氏公式

3.1 先縮小觀察範圍，再把權重重新加到一

知道 B 發生後，只留下 B 裡的結果。在 $P(B)>0$ 時，將其中每個權重除以 $P(B)$，讓剩下的權重重新合計為 1；於是 $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$。若 $P(B)=0$，就不做這次除法；即使 B 非空，這個定義也不適用。改寫得到 $P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$，這是機率樹沿路相乘的理由，不要求 A 與 B 獨立。

若 $B_1,\dots,B_m$ 互斥且合起來是 Ω，則事件 A 可拆成不重疊的 $A\cap B_i$。把這些機率相加，得 $P(A)=\Sigma\, P(B_i)P(A|B_i)$，和式只寫正機率的 B_i；零機率的區塊，其交集機率自然為零，不能先替它算未定義的條件機率。

若又知道 $P(A)>0$，可把 $P(A\cap B_j)$ 除以 $P(A)$，得到貝氏公式 $P(B_j|A)=P(A|B_j)P(B_j)/P(A)$（這裡分子乘積用在 $P(B_j)>0$）。分子是「屬於該組且看到證據」，分母是「不論哪一組都能看到同一證據」的總機率。條件方向互換通常會換分母，不能從任一方向的機率推論因果。



圖5 | 只看點數 4、5、6 的三格；奇數事件在這個新範圍只留下 5。

3.2 四個例題

例題1 公平骰已知至少 4

A 是奇數，B={4,5,6}。P(B)=3/6，A∩B={5}，P(A∩B)=1/6。因此 P(A|B)=(1/6)/(3/6)=1/3。原本 P(A)=1/2；已知 B 改變了可用的分母。

例題2 從次品反推來自哪條線

第一線供應 3/5、次品率 1/100；第二線供應 2/5、次品率 4/100。次品機率為 (3/5)(1/100)+(2/5)(4/100)=11/500。已知是次品時，來自第二線的機率是 (8/500)/(11/500)=8/11，而不是 4/100。

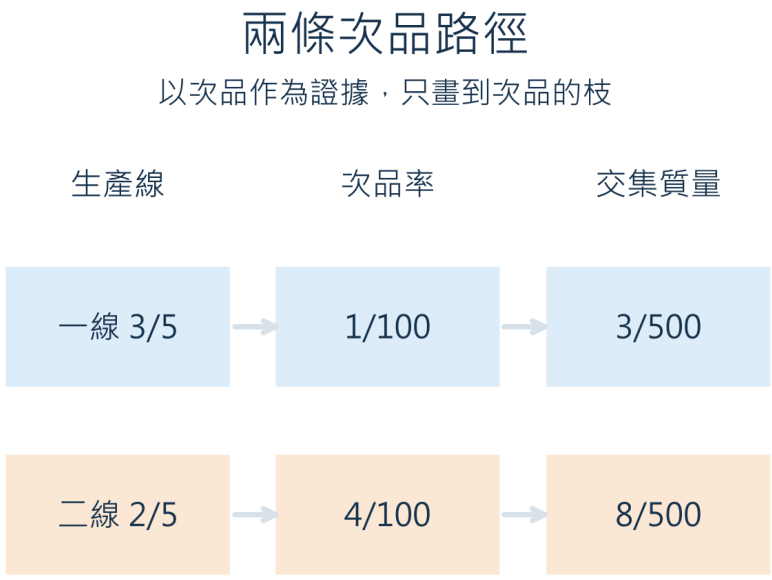


圖6 | 兩條次品路徑相加得 11/500；其中第二線貢獻 8/500。

例題3 兩個方向分母不同

100 個等可能樣本中，60 有 A、30 有 B，兩者同時有 18 個。$P(A|B)=18/30=3/5$，$P(B|A)=18/60=3/10$。分子相同，但句子「在有 B 的樣本裡」和「在有 A 的樣本裡」選出的參照組不同。

例題4 零機率的組不填條件率

$\Omega=\{a,b,c\}$，權重 $(1/3,2/3,0)$。分組 $B_1=\{a,b\}$、$B_2=\{c\}$，取 $A=\{b,c\}$。$P(A|B_1)=(2/3)/1=2/3$；$P(A|B_2)$ 未定義，但 $P(A\cap B_2)=0$。$P(A)=1\cdot 2/3+0=2/3$。

3.3 練習

1 **B11-C03-Q01** 公平骰已知是偶數，點數大於 3 的機率？

2 **B11-C03-Q02** $P(B)=2/5$、$P(A|B)=3/8$，求 $P(A\cap B)$。

3 **B11-C03-Q03** B_1、B_2 是 Ω 的分割，機率為 1/4、3/4；A 在兩組的條件率為 1/2、1/6，求 $P(A)$。

4 **B11-C03-Q04** 沿用上一題，已知 A，屬第一組的機率？

5 **B11-C03-Q05** $P(A)=1/5$、$P(B|A)=1/2$、$P(B)=1/4$，求 $P(A|B)$。

6 **B11-C03-Q06** 若 $P(B)=0$ 且 B 不是空集，可以說 $P(A|B)=0$ 嗎？

7 **B11-C03-Q07** $P(A\cap B)=1/12$、$P(B)=1/3$，求 $P(A^c|B)$。

8 **B11-C03-Q08** $P(A)=1/4$、$P(B)=1/2$、$P(A\cap B)=1/8$，求兩種條件方向。

9 **B11-C03-Q09** B_1、B_2 是 Ω 的分割，兩組皆有正機率，且 $P(A|B_1)=P(A|B_2)=1/5$。不論組別權重是否相等，$P(A)$ 為何？

10 **B11-C03-Q10** 以兩個會重疊的區域直接套全機率和式，哪一步可能錯？

3.4 完整解答

Q01

條件留下 {2,4,6}，都同權；其中 {4,6} 符合，故條件機率為 (2/6)/(3/6)=2/3。

Q02

因 P(B)>0，可由定義乘回 P(B)：(3/8)(2/5)=3/20。

Q03

兩條組別路徑互斥，貢獻分別 1/8 及 1/8；全機率為 1/4。

Q04

第一組且 A 的機率是 1/8，P(A)=1/4。除以證據總機率得 (1/8)/(1/4)=1/2。

Q05

交集是 (1/5)(1/2)=1/10；因 P(B)=1/4>0，除後得 (1/10)/(1/4)=2/5。

Q06

不能。本冊的條件機率用 $P(A\cap B)/P(B)$，分母為零；交集機率為零也不能定義 0/0。

Q07

在條件 B 內，A 與 A^c 互補。$P(A|B)=(1/12)/(1/3)=1/4$，所以 $P(A^c|B)=3/4$。

Q08

以 B 為分母得 $P(A|B)=1/4$；以 A 為分母得 $P(B|A)=1/2$。同一交集除以不同機率，答案不同。

Q09

若兩組互斥窮盡，兩組總權重為 1。提出共同的 1/5，剩下 $1/5\cdot 1=1/5$；不是把 1/5 加兩次。

Q10

拆出的交集 $A\cap B_1$ 與 $A\cap B_2$ 可能共含結果。直接相加會重數其質量；先改成互斥完整的分組，再用樹或和式相加。

第4章 事件獨立

4.1 獨立看乘積等式，不靠故事印象

兩事件獨立的定義是 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。若 $P(B)>0$，這等價於 $P(A|B)=P(A)$，即得知 B 沒改變 A 的機率。若 $P(B)=0$，只用乘積定義，不說未定義的條件率。若 A、B 都有正機率且互斥，交集為零而乘積為正，所以不獨立。互斥是不能同時發生，獨立並不是不能同時發生。

若 A 與 B 獨立，把 A 拆為 $A\cap B$ 與 $A\cap B^c$，便有 $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(B^c)$。因此把 B 換成補集仍獨立；把 A 換成補集也同理。判斷要對同一模型的事件做，不能把不同抽樣規則的機率混在一起。

多事件共同獨立要求任取至少兩項，交集機率都是各自機率的乘積。三項時，三個兩兩等式之外還有三重交集等式。兩兩獨立只檢查二項，不保證三重或更長交集也成立。

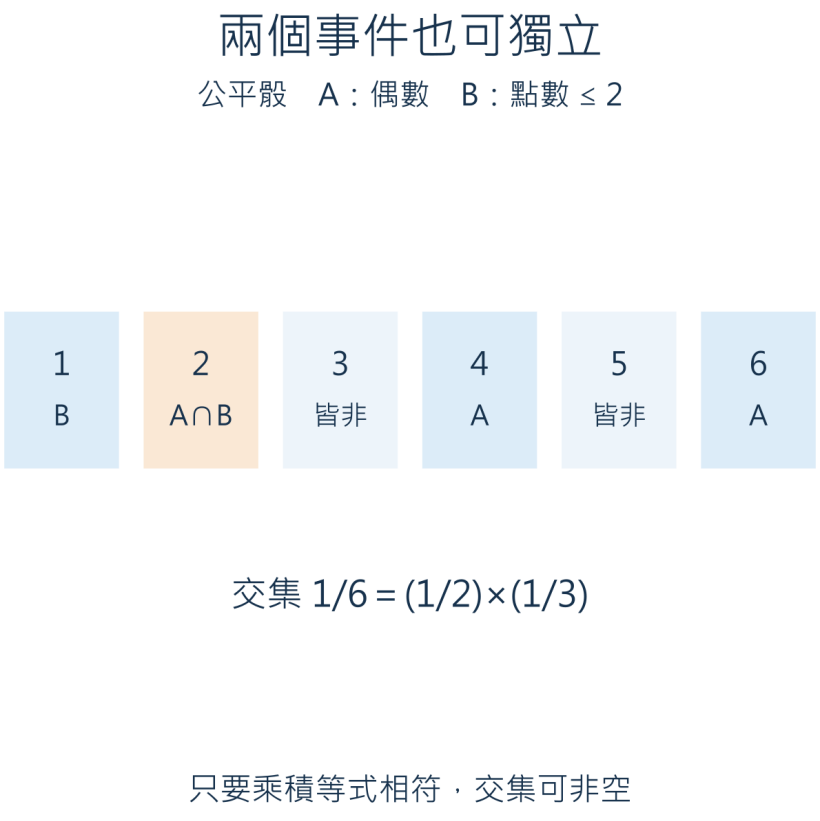


圖7 | 公平骰的六格依偶數與頭兩點分色，交集只有 2，恰好等於兩個比例的乘積。

4.2 四個例題

例題1 同一顆骰也可產生獨立事件

公平骰取 A={2,4,6}、B={1,2}。P(A)=1/2，P(B)=1/3，交集 {2} 機率 1/6=(1/2)(1/3)，故獨立。知道 B 後，1、2 等可能，偶數比例仍是 1/2。

例題2 互斥不能代替獨立

公平骰的 A={1}、B={6} 無共同結果，P(A∩B)=0。然而 P(A)P(B)=1/36>0，所以不獨立。若得知點數 6，點數 1 的機率從 1/6 變成 0。

例題3 兩兩獨立卻不共同獨立

公平獨立擲兩次硬幣。A 表第一次 H，B 表第二次 H，C 表兩次同面。三者各含兩格，機率皆 1/2；A∩B、A∩C、B∩C 都只含 HH，機率 1/4，故兩兩獨立。然而三重交集也只有 HH，機率 1/4≠1/8。

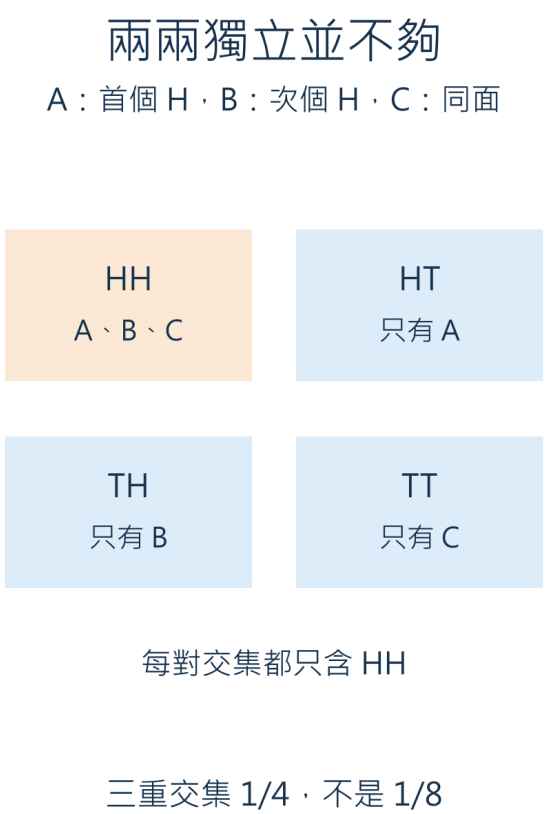


圖8 | 公平雙硬幣的四格中，恰同面的事件包含 HH、TT；三事件交集只剩 HH，與共同獨立的預測不同。

例題4 放回規則影響獨立性

袋中一紅一藍，各次從當下均勻取球。若每次放回並獨立重抽，雙紅機率 1/4，兩次紅事件各為 1/2，符合獨立。不放回時雙紅不可能；兩次的邊際紅機率仍各為 1/2，但 0≠1/4。

4.3 練習

1 **B11-C04-Q01** P(A)=2/3、P(B)=1/4 且獨立，求 P(A∩B)。

2 **B11-C04-Q02** P(A)=1/2、P(B)=1/2、P(A∩B)=1/3，獨立嗎？

3 **B11-C04-Q03** 獨立 A、B 的機率分別 3/5、1/4，求 $P(A^c \cap B)$。

4 **B11-C04-Q04** 零機率事件和任意事件是否獨立？

5 **B11-C04-Q05** 若 A、B 互斥且 P(A)=1/4、P(B)=1/2，求 P(A∪B) 並判是否獨立。

6 **B11-C04-Q06** P(B)>0、P(A|B)=P(A)，是否可判獨立？

7 **B11-C04-Q07** 公平骰的 A={1,2,3}、B={1,2,4,5} 獨立嗎？

8 **B11-C04-Q08** 沿用例題 3，已知 A、B 都發生，C 的條件機率？

9 **B11-C04-Q09** 若三個事件各有機率 1/2 且共同獨立，三者皆不發生的機率？

10 **B11-C04-Q10** 只知道每對事件獨立，能直接把三項機率相乘算三重交集嗎？

4.4 完整解答

Q01

按乘積定義相乘，$P(A\cap B)=(2/3)(1/4)=1/6$。條件率是否能寫不影響這個定義。

Q02

不獨立。定義要求交集為 $(1/2)(1/2)=1/4$，實際是 1/3，兩值不等。

Q03

A^c 與 B 仍獨立。先取 $P(A^c)=1-3/5=2/5$，再乘 1/4 得 1/10。

Q04

是。若 $P(A)=0$，則 $P(A\cap B)\le P(A)=0$，且機率非負，所以交集為 $0=P(A)P(B)$。不可用 $P(B|A)$ 做證明。

Q05

互斥使交集為零，聯集為 $1/4+1/2=3/4$。乘積 $1/8\neq 0$，因此不是獨立。

Q06

可以。把條件機率等式兩邊乘 P(B)，左邊成 $P(A\cap B)$，右邊成 $P(A)P(B)$，正是定義。

Q07

$P(A)=3/6$、$P(B)=4/6$，交集 {1,2} 機率 2/6。因 $(3/6)(4/6)=2/6$，所以獨立。

Q08

$A\cap B$ 只剩 HH，該結果必然屬 C。分子與分母皆 1/4，條件機率為 1；它與未條件化的 1/2 不同。

Q09

對原來的三個事件用容斥：三個單項和為 3/2，兩兩和為 3/4，三重為 1/8；聯集為 7/8，聯集的補集為 1/8。這裡用到三重乘積。

Q10

不能。每對只提供兩項的乘積等式。例題 3 的三重交集 1/4 並不等於三個 1/2 的乘積 1/8。

第5章 隨機變數與離散分布

5.1 同一數值的原像要把質量合併

在有限樣本空間 Ω 上，實值隨機變數 X 是對每個基本結果指定一個實數的函數。X 不是直接「隨機地變換」；隨機性來自抽到哪個結果。事件「X=x」指所有被映到 x 的結果。把這些權重合併，就得到機率質量函數 p(x)=P(X=x)。

同一個值只能在質量表列一次，質量非負且總和為 1。所有正機率的值稱支撐；可以另外列零機率的值，但不把它們算進正質量支撐。對數值集合 T，P(X∈T) 是其中質量的和，不是數值本身的和。若把 X 變成 Y=g(X)，先看哪些 x 被 g 合在一起，再加質量。可以用這條規則往後處理可數的離散分布，但那時總質量用收斂的無窮和。

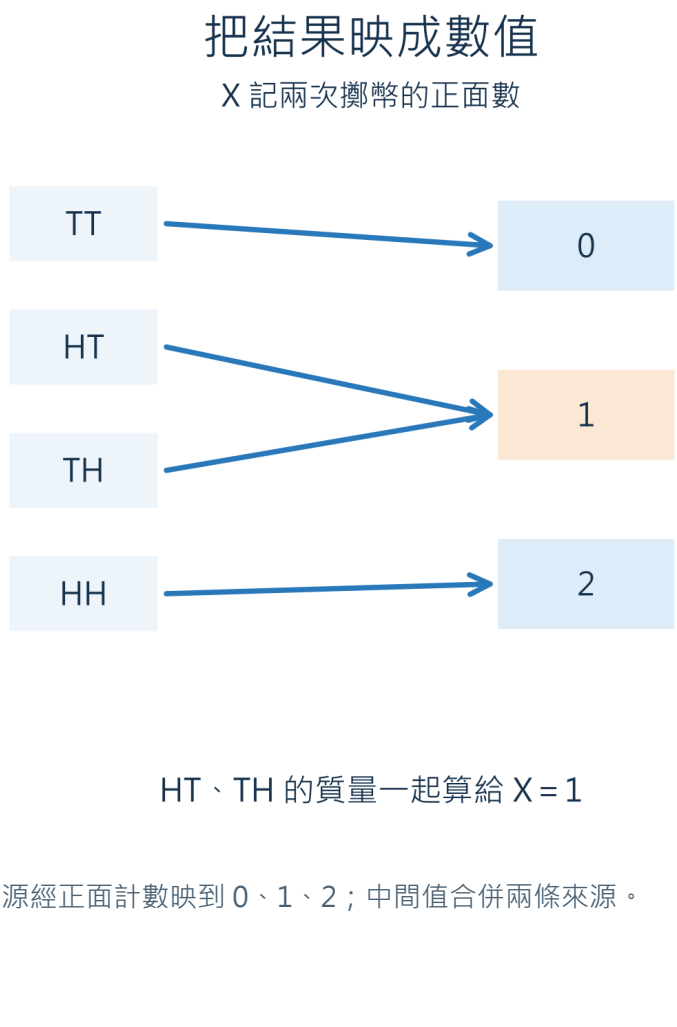


圖9 | 兩次硬幣的四個來源經正面計數映到 0、1、2；中間值合併兩條來源。

5.2 四個例題

例題1 從四個結果組成三根柱

公平且獨立的兩次擲幣，各有序結果重 1/4。令 X 數正面，TT 映到 0，HT、TH 映到 1，HH 映到 2。所以三支質量依序 1/4、1/2、1/4，相加為 1。P(X≥1)=1/2+1/4=3/4。

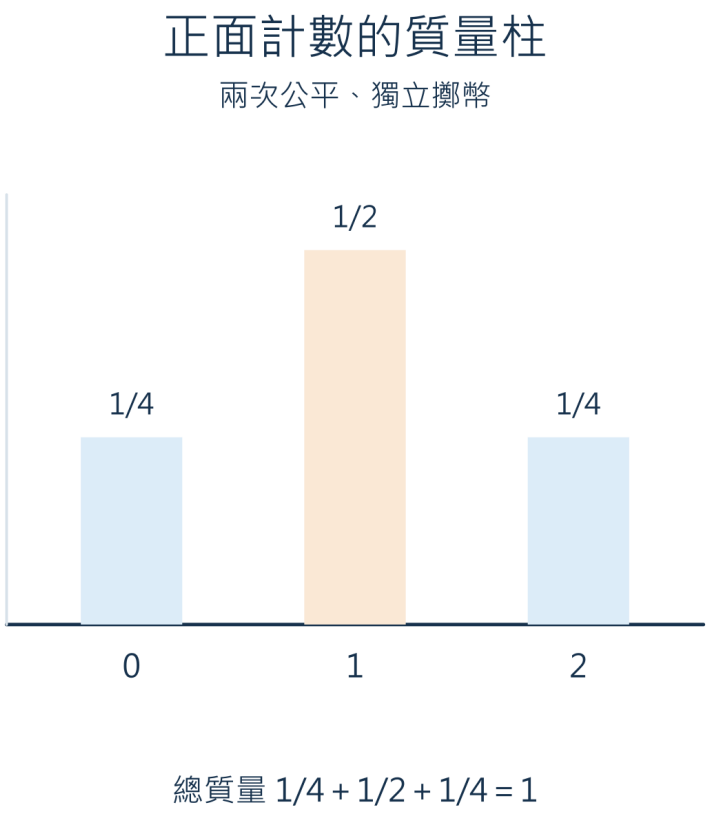


圖10 | 公平、獨立雙硬幣的正面次數在 0、1、2 的柱高依次是 1/4、1/2、1/4。

例題2 相同機率的結果可能合成不同機率的值

公平骰定 Y=點數除以 3 的餘數。0 的原像是 {3,6}，1 的原像是 {1,4}，2 的原像是 {2,5}，所以三值各 1/3。這次合併後等可能，理由是原像同樣大，不是因為只有三值。

例題3 轉換可把支撐合併

X 的值 −1、0、1 各重 1/4、1/2、1/4。令 $Y=X^2$，則負與正兩端同映到 1，所以 $P(Y=1)=1/2$，$P(Y=0)=1/2$。若誤把 X 質量表逐行保留，會漏掉合併後同值的總質量。

例題4 由歸一條件找缺值

X 在 1、3、5 上質量 c、2c、c。總和 $4c=1$，得 $c=1/4$；三項非負，所以合法。$P(X>1)=2c+c=3/4$。求出 c 後，還要檢查這組權重非負。

5.3 練習

1 **B11-C05-Q01** 四個結果依次重 1/8、3/8、1/4、1/4，X 的值依次 0、0、1、2，求 p(0)。

2 **B11-C05-Q02** 用上一題的分布求 $P(X\in\{1,2\})$。

3 **B11-C05-Q03** 公平骰令 X 為點數是否大於 4 的指標（是 1、否 0）。p(0)、p(1)？

4 **B11-C05-Q04** 質量表 (1/4,−1/4,1) 合法嗎？

5 **B11-C05-Q05** 正質量出現在 x=−2、2，各有 1/2。$Y=|X|$ 的分布？

6 **B11-C05-Q06** 例題 1 的 X，令 $Y=2X+1$，列支撐及各質量。

7 **B11-C05-Q07** 例題 1 中 p(4) 是多少？

8 **B11-C05-Q08** 三個相異值的質量 c、c、3c，各是多少？

9 **B11-C05-Q09** 同一張機率質量表，能唯一找回原本的樣本空間嗎？

10 **B11-C05-Q10** 樣本空間有零權重結果映到 100，X 另在 2 有全部正質量，支撐是什麼？

5.4 完整解答

Q01

前兩個結果的數值皆為零，質量相加：1/8+3/8=1/2；檢查 1/2+1/4+1/4=1。

Q02

後兩格對應互斥的數值事件，所以質量 1/4+1/4=1/2；不把標籤 1、2 相加。

Q03

大於 4 的是 5、6，故 p(1)=2/6=1/3。其餘四個點數映到 0，p(0)=2/3，合計為 1。

Q04

不合法。總和雖為 1，但第二格質量為負，違反非負條件。不能只查機率總和。

Q05

兩個來源都映到 2，合併質量為 1。故 Y 只有一個支撐點 2，其餘值機率皆零。

Q06

值 0、1、2 依次映為 1、3、5，彼此不同，原權重可逐一轉移。因此質量依序仍是 1/4、1/2、1/4。

Q07

可能正面次數最多 2，沒有結果映到 4。該事件是空集，故機率為 0。

Q08

先令 c+c+3c=1，得到 c=1/5。三個機率為 1/5、1/5、3/5，皆非負且合為 1。

Q09

不能。原像各由幾個結果、如何拆權重都可能不同。單一機率 1/2 可由一個權重 1/2 的結果，或兩個各 1/4 的結果給出。

Q10

機率質量只在 2 為正。100 雖在這個函數的值域，卻不是正質量支撐；P(X=100)=0。

第6章 期望與加權平均

6.1 權重決定平均，不是每個值各算一票

有限情形的期望 E[X]=Σ x p(x)：每個數值乘上它的機率，再相加。也可以在樣本空間算 Σ X(s)w(s)，因把同值項合併後就得到前一式。期望可能不是任何可取的值，也不一定是出現機率最高的值。

在同一模型上，把兩個隨機變數逐結果相加。因有限和可分拆，Σ (X(s)+Y(s))w(s)=Σ X(s)w(s)+Σ Y(s)w(s)，所以 E[X+Y]=E[X]+E[Y]，不需要獨立。同理 E[aX+b]=aE[X]+b，其中常數 b 乘上的權重總和是 1。乘積不能照搬這條規則，E[XY] 每次都要算同一結果上的乘積再加權。

事件 A 的指標 I_a 在發生時取 1，否則取 0，所以 $E[I_a]=P(A)$。次數是指標的和，求平均次數只要加邊際機率。是否能用這些機率進一步求「次數的分布」則是另一回事，常需知道事件如何一起發生。

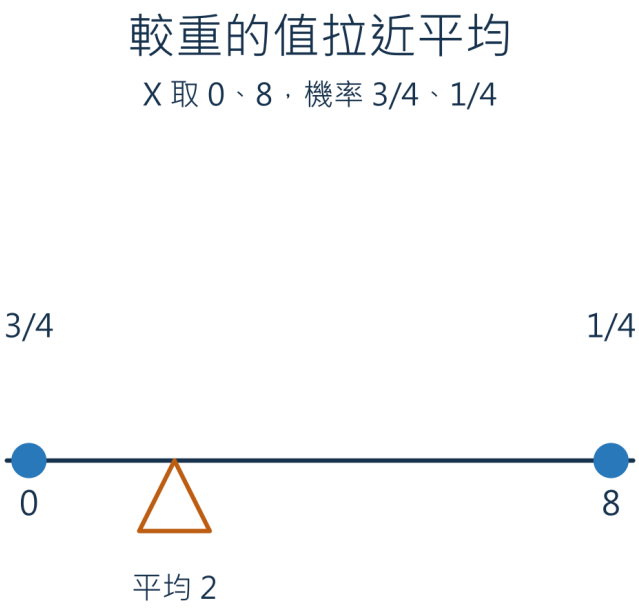


圖11 | 值 0 和 8 的質量分別為 3/4 與 1/4；加權平均 2 離較重的 0 更近。

6.2 四個例題

例題1 用貢獻表算平均點數

一個活動的點數 X 取 −2、0、8，機率分別 1/2、1/4、1/4。各值乘質量是 −1、0、2，相加得 E[X]=1。沒有任何一次會得 1 點；機率最大的單次結果反而是 −2。

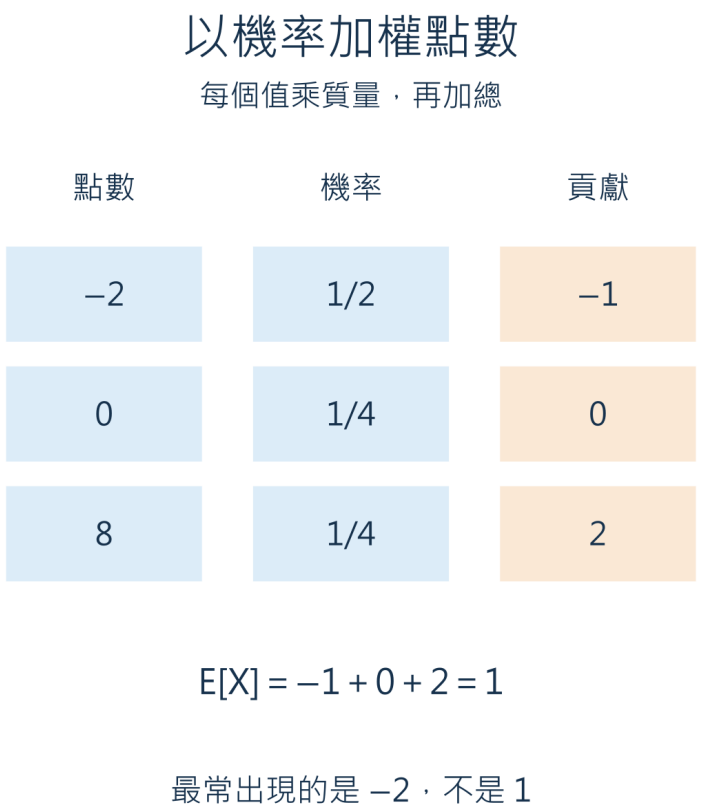


圖12 | 加權貢獻分別為 −1、0、2，合計的平均點數為 1。

例題2 同一試驗上的兩個量不必獨立

公平骰點數 X。令 Y=7−X，兩者明顯連動，X+Y 永遠等於 7。E[X]=21/6=7/2，E[Y]=7−7/2=7/2，相加仍為 7，正符合線性性。

例題3 只靠邊際機率求平均次數

三盞燈在一次檢查時需更換的機率依次 1/5、1/10、1/4，不假設三盞獨立。對各盞記 0 或 1，再相加為更換數；平均更換數為 1/5+1/10+1/4=11/20。由此尚不能求出全要換的機率。

例題4 先轉換每個結果，再取期望

X 為 −1 或 1，各機率 1/2。E[X]=0；但兩個結果平方皆為 1，E[X²]=1，不等於 (E[X])²。函數不是仿射時，不能先取期望再代入。

6.3 練習

1 **B11-C06-Q01** X 取 0、10，機率 7/10、3/10，求期望。

2 **B11-C06-Q02** 沿用上一題，Y=2X−1 的期望？

3 **B11-C06-Q03** 公平骰點數的指標 I 在點數 1 或 6 時為 1。求 E[I]。

4 **B11-C06-Q04** E[X]=2、E[Y]=−1，求 E[3X−2Y+4]。

5 **B11-C06-Q05** X 等於 0 或 2，各 1/2，求 E[X²]。

6 **B11-C06-Q06** 5 個同類指標各有成功率 2/5，平均有幾個成功？需獨立嗎？

7 **B11-C06-Q07** X 的支撐在 2 與 5 之間（含端點）。期望能是 6 嗎？

8 **B11-C06-Q08** X 取 −3 或 1，若 E[X]=0，求 P(X=−3)。

9 **B11-C06-Q09** X=Y 同為公平幣的正面指標。E[XY] 是否等於 E[X]E[Y]？

10 **B11-C06-Q10** 例題 1 最常出現的點數就是平均嗎？

6.4 完整解答

Q01

E[X]=0·(7/10)+10·(3/10)=3。3 是加權平均而不是可能取值。

Q02

由線性性，E[Y]=2E[X]−1=2·3−1=5。也可把取值改成 −1、19，用相同權重回算。

Q03

I=1 的機率有兩個有利點數，即 2/6；其餘值為零不貢獻，所以期望是 1/3。

Q04

拆開每項得 3·2−2·(−1)+4=12；X、Y 必須在同一模型，但不必獨立。

Q05

平方之後是 0 和 4，各權重 1/2，所以 $E[X^2]=0/2+4/2=2$。平方 (E[X]) 則為 1。

Q06

把 5 個指標相加，期望是 5·(2/5)=2。不需要獨立；若要算完整分布，單靠這些邊際機率還不夠。

Q07

不能。每個可能值 x≤5，以非負質量加權後 E[X]≤5·1=5；同理 E[X]≥2。平均不能越過支撐兩端。

Q08

設負值機率為 p，則 −3p+1(1−p)=0，化為 1−4p=0，得 p=1/4；另一質量 3/4 合法。

Q09

$XY=X^2=X$，所以 E[XY]=1/2。但兩個平均相乘是 1/4，不等。把期望拿進乘法不能只看邊際。

Q10

不是。−2 的機率 1/2 最高；期望同時考慮各值大小，8 雖只占 1/4 卻貢獻 2，因此平均為 1。

第7章 變異數與標準差

7.1 先算偏差，再平方加權

期望抓住中心，卻可能看不出分散。令 $\mu=E[X]$，定義 $Var(X)=E[(X-\mu)^2]$。偏左與偏右的差都平方成非負數，不會互相抵消。標準差 $SD(X)=\sqrt{Var(X)}$，與 X 使用同樣的單位；若 X 的單位是公分，變異數的單位是平方公分。

展開平方得 $E[X^2-2\mu X+\mu^2]=E[X^2]-2\mu^2+\mu^2$，因此 $Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2$。這是精確等式；不應在各項太早截去小數，而得到假的負值。在有限模型中，變異數為零當且僅當 X 在所有正機率結果都等於同一個常數。零權重的結果不影響判斷。

令 $Y=aX+b$。Y 的平均為 $a\mu+b$，因此其偏差 $Y-E[Y]=a(X-\mu)$，$Var(Y)=a^2Var(X)$，$SD(Y)=|a|SD(X)$。平移整組數據不改分散程度；乘上負數會翻轉方向，但分散程度不能是負的。

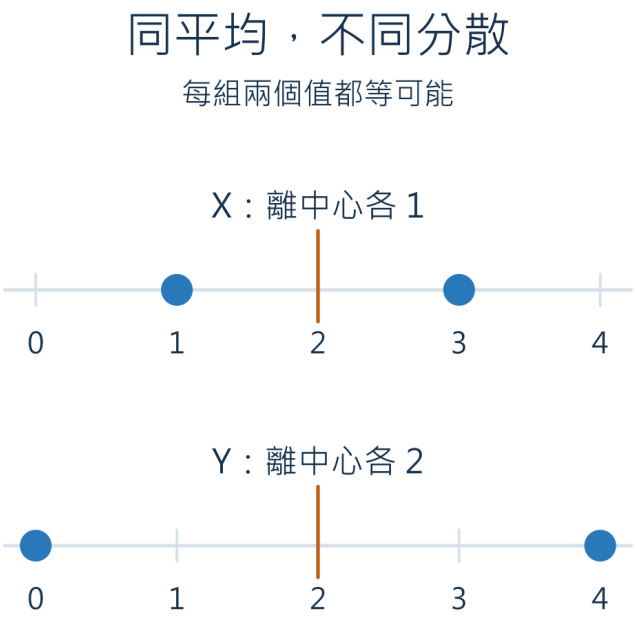


圖13 | 兩分布的中心都在 2：第一個在 1、3；第二個在 0、4，後者的偏差平方較大。

7.2 四個例題

例題1 一樣的平均，不一樣的分散

X 取 1、3 各半，Y 取 0、4 各半，兩者期望皆是 2。X 偏差平方都是 1，所以 Var(X)=1；Y 偏差平方都是 4，Var(Y)=4，對應標準差是 1、2。

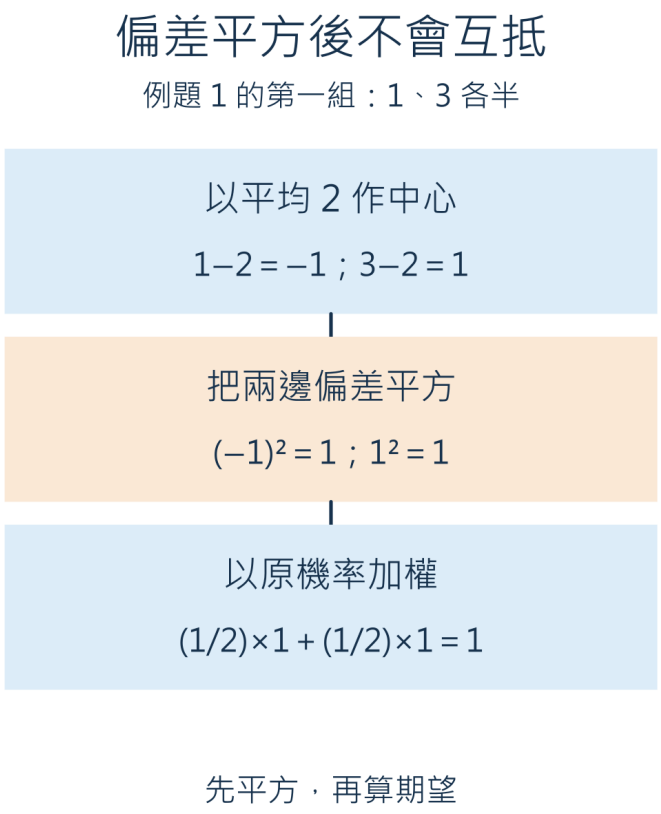


圖14 | 1 和 3 各半時，兩側偏差為 −1 與 1；平方加權後變異數為 1。

例題2 兩種算法相互校驗

X 取 0 與 3，機率 2/3 與 1/3。μ=1，從偏差平方得到 (2/3)·1+(1/3)·4=2。另一法 $E[X^2]=3$，減掉 $\mu^2=1$ 也是 2。

例題3 重新標尺

沿用上一例，令 Z=10−2X。E[Z]=10−2=8，Var(Z)=(−2)²·2=8，SD(Z)=2√2。10 只搬動中心，−2 的絕對值才改變標準差。

例題4 伯努利變數的分散

$I=1$ 的機率為 p，其餘取 0。因 $I^2=I$，$E[I^2]=E[I]=p$，$\mathrm{Var}(I)=p-p^2=p(1-p)$。當 $p=1/4$，變異數 $3/16$，標準差 $\sqrt{3}/4$。

7.3 練習

1 **B11-C07-Q01** X 取 -2、2 各半，求平均與變異數。

2 **B11-C07-Q02** X 取 0、4，機率 $3/4$、$1/4$，求 $\mathrm{Var}(X)$。

3 **B11-C07-Q03** 若 $\mathrm{SD}(X)=3$，求 $\mathrm{SD}(5-2X)$。

4 **B11-C07-Q04** $\mathrm{Var}(X)=9$，計算 $\mathrm{Var}(X-7)$ 與 $\mathrm{Var}(X/3)$。

5 **B11-C07-Q05** 常數 8 的標準差為何？

6 **B11-C07-Q06** $E[X]=2$、$E[X^2]=7$，求 $\mathrm{SD}(X)$。

7 **B11-C07-Q07** 若報告 $E[X]=3$、$E[X^2]=8$，兩者能同時是精確值嗎？

8 **B11-C07-Q08** I 的成功機率從 $1/5$ 變成 $4/5$，變異數改變嗎？

9 **B11-C07-Q09** 兩個值不同，但其中一個質量為零，變異數能為零嗎？

10 **B11-C07-Q10** 有人說 $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$ 總成立。令 $Y=X$、$\mathrm{Var}(X)=2$，可否反駁？

7.4 完整解答

Q01

平均為 0。兩端距中心都是 2，平方皆 4，以兩個 1/2 加權後變異數為 4。

Q02

$\mu=1$，$E[X^2]=16/4=4$，故 $\mathrm{Var}(X)=4-1=3$。若只將兩值各半，得到的是另一模型。

Q03

乘 -2 讓所有相對偏差的大小變兩倍，加 5 不影響偏差，所以標準差 $2\cdot 3=6$。

Q04

平移保留 9。除以 3 使每個偏差除 3，平方後除以 9，所以後者是 1。

Q05

每次取的值都等於其期望 8，所有偏差為 0。變異數為 0、開平方後仍為 0。

Q06

先相減求 $\mathrm{Var}(X)=7-2^2=3$，再取非負平方根 $\sqrt{3}$；不要先給兩項各自開平方。

Q07

不能。代入會得 $\mathrm{Var}(X)=8-3^2=-1$，與非負矛盾。如果數字是四捨五入值，則應回到未截斷資料檢查。

Q08

不變。兩者的 p 和 $1-p$ 互換，乘積同為 $(1/5)(4/5)=4/25$；中心由 1/5 改為 4/5。

Q09

可以。若 $X=2$ 的質量為 1、$X=5$ 的質量為 0，$\mu=2$，第一項偏差為零，第二項的偏差平方乘零；$\mathrm{Var}(X)=0$。

Q10

可以。$X+Y=2X$，因此 $\mathrm{Var}(X+Y)=4\mathrm{Var}(X)=8$，但兩項變異數相加只有 4。下一章會看少掉的交叉項。

第8章 聯合分布與協方差

8.1 先看一整張表，再談獨立和線性變化

聯合分布列每對 (x,y) 的質量 P(X=x,Y=y)。加總一列可得 X 的邊際，逐欄加總可得 Y 的邊際；所有格的總和是 1。兩變數獨立要求每一格都等於對應兩個邊際的乘積。只要一格不符合，就能排除獨立；只對一格符合，證據不夠。

有限情形的協方差 Cov(X,Y)=E[(X−E[X])(Y−E[Y])]=E[XY]−E[X]E[Y]。算 E[XY] 時，用同一格的 x、y 相乘才加權。若 X、Y 獨立，聯合質量可分成邊際的乘積，E[XY] 可拆為 E[X]E[Y]，因此協方差為零；逆向一般不成立。若兩者標準差皆非零，可將協方差除以 SD(X)SD(Y) 得 Pearson 相關係數。它描述線性關係，不表示因果；有一個量為常數時，這個相關係數未定義。

把 (X−E[X]+Y−E[Y])² 展開，兩個平方項加一個兩倍的交叉項，所以 Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2 Cov(X,Y)。只有已知交叉項為零才能直接相加；獨立是足以保證此事的條件。



圖15 | 二乘二質量表加總列與欄，得到各自的邊際分布。

8.2 四個例題

例題1 列和、欄和與一格反例

取四格 (0,0)、(0,1)、(1,0)、(1,1) 依次質量 3/10、1/10、2/10、4/10。X=0、1 的質量為 2/5、3/5；Y=0、1 各為 1/2。右下格是 2/5，不等於 (3/5)(1/2)=3/10，故不獨立。

例題2 由同一表算協方差

前例中 E[X]=3/5、E[Y]=1/2。XY 只在右下格為 1，E[XY]=2/5，Cov=2/5−3/10=1/10。若把 X+Y 的分布拿來回算，變異數是 69/100，等於 6/25+1/4+2·1/10。

例題3 協方差為零仍可完全連動

X 等可能為 −1、0、1，Y=X²。E[X]=0，XY=X³，對稱使 E[XY]=0，故 Cov=0。但 P(Y=0|X=0)=1，而 P(Y=0)=1/3，兩者不獨立。

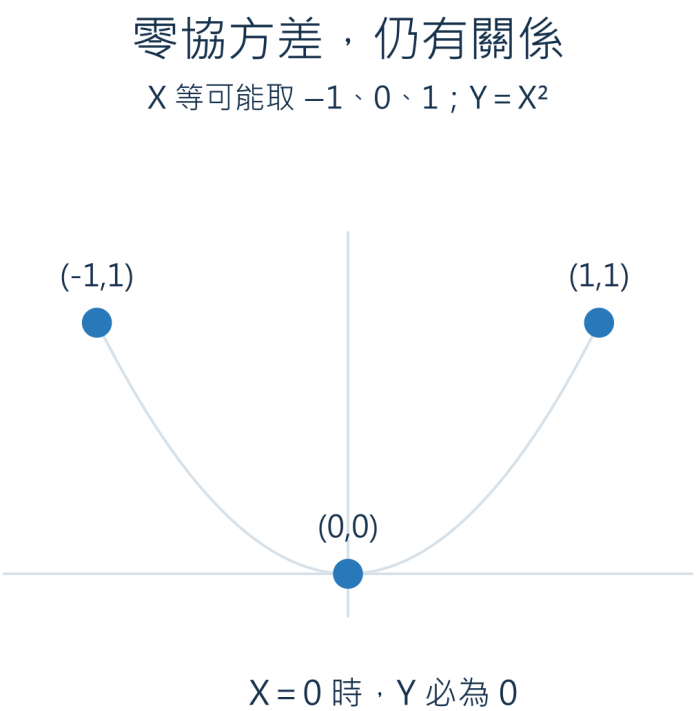


圖16 | 三個等可能點在對稱拋物線上；協方差是零，Y 卻由 X 完全決定。

例題4 獨立時才可由邊際重建整張表

獨立的兩個指標，P(X=1)=1/3、P(Y=1)=1/2。四格依次為 (2/3)(1/2)=1/3、1/3、1/6、1/6。總和為 1，且每格由邊際乘積給出。

8.3 練習

1 **B11-C08-Q01** 沿用例題 1，求 P(Y=0)、P(X=0)。

2 **B11-C08-Q02** 沿用例題 1，求 P(Y=1|X=1)。

3 **B11-C08-Q03** 獨立指標 P(X=1)=1/4、P(Y=1)=2/3，求 P(X=0,Y=1)。

4 **B11-C08-Q04** E[XY]=4、E[X]=1、E[Y]=3，求協方差。

5 **B11-C08-Q05** Var(X)=2、Var(Y)=3、Cov(X,Y)=−1，求 Var(X+Y)。

6 **B11-C08-Q06** 若例題 3 改成 Y=−X，求協方差。

7 **B11-C08-Q07** 只知道兩個邊際皆是公平指標，是否能判獨立？

8 **B11-C08-Q08** 若 Y 是常數，Cov(X,Y) 和 Pearson 相關係數各如何？

9 **B11-C08-Q09** 用例題 1 的表求 Var(X−Y)。

10 **B11-C08-Q10** 表中某格比邊際乘積大，能判斷兩變數不獨立嗎？

8.4 完整解答

Q01

對 Y=0 加左欄 3/10+2/10=1/2；對 X=0 加上列 3/10+1/10=2/5。

Q02

右下格質量 4/10，X=1 的整列質量 6/10>0。條件比值 (4/10)/(6/10)=2/3。

Q03

X=0 的機率 3/4。獨立性允許乘 (3/4)(2/3)=1/2。

Q04

代入 Cov=4−1·3=1。這只描述線性共同變動，不足以判斷因果。

Q05

兩平方項給 5；交叉項是 2·(−1)=−2。合起來為 3，不是 5。

Q06

兩者平均皆零，$XY=-X^2$。$E[X^2]=(1+0+1)/3=2/3$，故 Cov=−2/3。

Q07

不能。可以令兩者永遠相同，聯合右下格為 1/2；也可以獨立抽兩次，右下格為 1/4。兩張表邊際相同。

Q08

Y−E[Y]=0，所以 Cov=0。但 SD(Y)=0，Pearson 相關的分母為零，因此未定義。

Q09

Var(X)=6/25、Var(Y)=1/4；展開相減的偏差平方，交叉項是 −2 Cov，故 6/25+1/4−2·1/10=29/100。

Q10

可以。獨立要求所有格都等於乘積，任一格不合便否定整個條件。不能僅以某一格合格反推獨立。

第9章 條件期望與總量公式

9.1 整體變動分成組內與組間

令 G 是記錄所屬區塊的組別變數：每個結果屬於唯一一組，所有組別合起來為 Ω。對正機率組 B_i，把該組權重除以 $P(B_i)$，在這個條件模型算 $\mu_i=E[X|B_i]$、$v_i=Var(X|B_i)$。條件期望 $E[X|G]$ 是一個隨機變數，在同一組內取同一個 μ_i。零質量組的 μ_i 與 v_i 不由除法定義；表達成隨機變數時可任填代表值，不影響加權結果。

把有限和按組拆開，可得 $E[X]=\Sigma\, P(B_i)\mu_i=E[E[X|G]]$，稱全期望公式。其理由是用組別內的歸一權重算平均後，乘回該組總權重，就還原原來各結果的貢獻。組別大小不必相等，因此不能直接平均各組平均值。

令 $\mu=E[X]$。在第 i 組寫成 $X-\mu=(X-\mu_i)+(\mu_i-\mu)$。平方後，組內平均的交叉項因 $E[X-\mu_i|B_i]=0$ 而消失，剩 $v_i+(\mu_i-\mu)^2$。對組別加權，就得到 $Var(X)=E[Var(X|G)]+Var(E[X|G])$。第一項是組內偏差，第二項是組別中心彼此偏離；不能只保留一項。

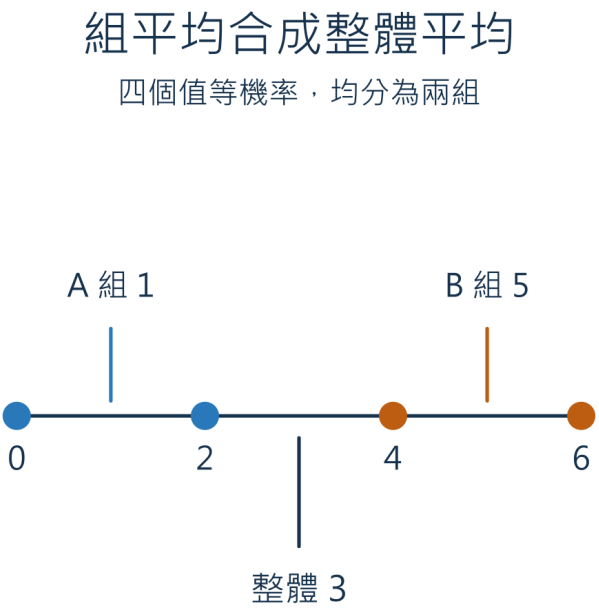


圖17 | 兩組各占一半；第一組中心 1、第二組中心 5，整體中心是 3。

9.2 四個例題

例題1 把四格分成兩組

A 組以等條件機率取 0、2；B 組等機率取 4、6。兩組各重 1/2，$\mu_a=1$、$\mu_\beta=5$，整體平均 3。各組變異數都 1，組內項是 1；兩個中心偏 3 各 2，組間項是 4。總變異數為 5；直接對四個等機率值算也相同。



圖18 | 兩組各有組內變異數 1，組別中心的變異數為 4；相加得 5。

例題2 組別不等重，不能直接平均

A 組機率 1/4 且 X 恆為 0，B 組機率 3/4 且 X 恆為 4。全期望是 $(1/4)\cdot 0+(3/4)\cdot 4=3$，不是 $(0+4)/2$。兩組內毫無分散，總變異數完全來自組間，為 $(1/4)(0-3)^2+(3/4)(4-3)^2=3$。

例題3 兩個變異來源都不為零

A 組占 3/4，X 恆 1；B 組占 1/4，X 以一半機率取 1、5。兩組中心 1、3，組內變異數 0、4，故平均為 3/2，組內項 1。組間項是中心 1、3 以 3/4、1/4 加權的變異數 3/4。總變異數 7/4。

例題4 零機率的組不除以零

若 Ω 中還有一個零質量結果 c，並把它單獨分為 C，則 $P(C)=0$。該組不進條件平均除法，也不貢獻兩個加權和。這不表示 $X(c)$ 沒有定義，而是該結果不影響機率加權。

9.3 練習

1 **B11-C09-Q01** A、B 是 Ω 的分割，P(A)=1/3、P(B)=2/3，組均值 2、8，求總平均。

2 **B11-C09-Q02** 沿用上一題，若組內變異數為 1、4，求組內項。

3 **B11-C09-Q03** 沿用兩題，求組間項與 Var(X)。

4 **B11-C09-Q04** 各組的平均相同，組間項是多少？

5 **B11-C09-Q05** 每組內都是常數，各組常數不同。哪個項保留？

6 **B11-C09-Q06** 兩組各半，$\mu_a=1$、$\mu_\beta=3$，兩組內變異數均為 2。求 Var(X)。

7 **B11-C09-Q07** 已知 Var(X)=10，E[Var(X|G)]=6，求 Var(E[X|G])。

8 **B11-C09-Q08** 一個分組把同一結果同時放到兩組，能直接用全期望嗎？

9 **B11-C09-Q09** A、B 是 Ω 的分割，A 組重 1/5、平均 4，整體平均 8，求 B 的平均。

10 **B11-C09-Q10** 已知唯一非零質量組 B 的條件變異數為 7，總變異數多少？

9.4 完整解答

Q01

先乘組權重：2/3+16/3=18/3=6。不能把 2、8 各給一半權重。

Q02

以組別質量加權變異數，得 (1/3)·1+(2/3)·4=3。不是將組內標準差取平均再平方。

Q03

組間項是中心偏差 (2−6)²、(8−6)² 的加權和，得 16/3+8/3=8；總變異數為 3+8=11。

Q04

E[X|G] 在所有正質量組取同一值，所以它的變異數為 0。總變異數可仍由組內項提供。

Q05

每組內的偏差都是零，第一項為 0；Var(X) 等於組中心的加權變異數。只要兩個不同中心都有正權重，它就為正。

Q06

組中心平均 2，偏差平方各 1，所以組間項 1。組內項是 (2+2)/2=2，總變異數 3。

Q07

由全變異數分解，組間項為 10−6=4；若任一項報負值，應回頭檢查組別與資料。

Q08

不能。按組拆原和時，同一結果會被計入兩次，分割要求失敗。應先修成互不重疊且涵蓋全部結果的組別。

Q09

B 重 4/5。由 $8=(1/5)\cdot 4+(4/5)\mu_\beta$，移項並除 4/5，得到 $\mu_\beta=9$。

Q10

B 的權重為 1，其他組不參與。組內項為 7，組間項為 0，總變異數為 7；沒有任何零分母運算。

第10章 常見離散模型

10.1 先辨認試驗規則，再選模型

一次成功或失敗的試驗，可用伯努利指標 I 表示，P(I=1)=p、P(I=0)=1−p。若固定做 n 次、每次成功率相同且相互獨立，總成功次數 X 服從二項分布。恰 k 次成功，先選 k 個成功位置，再乘單一路徑機率：P(X=k)=C(n,k)p^k(1−p)^(n−k)（0≤k≤n）。不同位置的事件向量彼此互斥。p=0 或 1 時直接看成整段皆失敗或皆成功，空乘積為 1。由指標的期望及獨立使協方差為零，E[X]=np、Var(X)=np(1−p)。

對一列相互獨立、每次成功率皆為 p 的伯努利試驗，令 T 記包含首次成功那一次的試驗總數。當 0<p<1，T 服從本冊由 1 起算的幾何分布。對整數 k≥1，P(T=k)=(1−p)^(k−1)p；對整數 k≥0，P(T>k)=$(1-p)^k$。後一式來自前 k 次全部失敗，且其極限為 0，所以以機率 1 會在有限次內首次成功。p=1 時 T 恆為 1；若 p=0，各次都失敗，便沒有有限的首次成功。

不放回地從有限批中均勻抽，條件率會隨前面結果改變，回到第 2 章的組合比值。若題目直接給某區間的計數模型為 Poisson(λ)，λ>0，則 P(N=k)=e^(−λ)λ^k/k!，k=0,1,…。由指數級數知質量總和為 1；λ=0 時視為恆零。不能只憑「很多」或「很少」就假設某一模型。

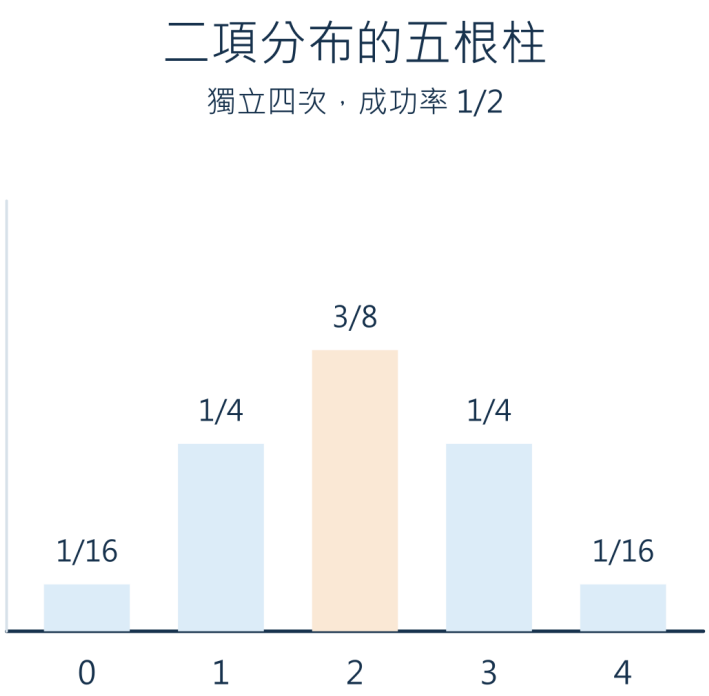


圖19 | 四次公平獨立試驗的成功數，五個柱高比為 1:4:6:4:1。

10.2 四個例題

例題1 固定四次成功數

四次公平獨立擲幣，令 X 數正面。恰兩次有 C(4,2)=6 種位置，每條機率 1/16，故 P(X=2)=3/8。平均 4·1/2=2，變異數 4·(1/2)(1/2)=1。

例題2 等待首次成功

每次獨立、成功率 1/4。T=3 需先失敗兩次再成功，機率 $(3/4)^2(1/4)=9/64$。T>3 代表前三次全部失敗，為 $(3/4)^3=27/64$；這兩題事件不同。

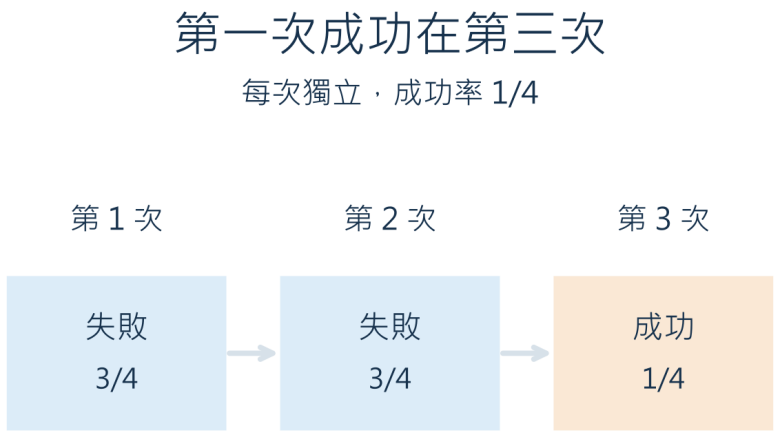


圖20 | 首次在第 3 次成功，路徑是先兩次失敗，再一次成功。

例題3 不放回不用相同的 p

十二件物品中五件合格；不放回均勻抽四件。恰一合格有 C(5,1)C(7,3)=175 組，總數 C(12,4)=495，機率 35/99。第一件合格後，第二次合格率變成 4/11，而非原來的 5/12。

例題4 已知計數是 Poisson

在一個已指定 N~Poisson(2) 的到達次數模型，$P(N=0)=e^{-2}$，$P(N=1)=2e^{-2}$，所以 $P(N\le1)=3e^{-2}$。另有 $P(N=2)=2^2e^{-2}/2!=2e^{-2}$。結論依賴題目所給模型。

10.3 練習

1 **B11-C10-Q01** 一次成功率 1/5 的伯努利 I，求 E[I]、Var(I)。

2 **B11-C10-Q02** 五次獨立且成功率 1/5，恰一次成功的機率？

3 **B11-C10-Q03** 沿用上一題，求至少一次成功。

4 **B11-C10-Q04** 各次獨立且 p=1/3，求首次成功在第 2 次。

5 **B11-C10-Q05** 上一題求 P(T≤2)。

6 **B11-C10-Q06** 三紅二藍不放回抽二，為何不能用 Binomial(2,3/5)？

7 **B11-C10-Q07** N~Poisson(3)，求 P(N=1)/P(N=0)。

8 **B11-C10-Q08** N~Poisson(1)，求 P(N≤2)。

9 **B11-C10-Q09** 若 p=1，幾何模型中的 T 等於多少？

10 **B11-C10-Q10** 只有每次邊際成功率皆 1/2、卻未假定獨立，可否用二項公式？

10.4 完整解答

Q01

期望是成功率 1/5。因 $I^2=I$，變異數是 $1/5-1/25=4/25$。

Q02

可選五個位置；每條路徑機率 $(1/5)(4/5)^4$，合計 $(4/5)^4=256/625$。

Q03

補集全失敗率是 $(4/5)^5$，因此所求為 $1-(4/5)^5=2101/3125$。

Q04

第一失敗、第二成功，沿路乘 $(2/3)(1/3)=2/9$。若要求到第二次仍未成功，才乘兩個 2/3。

Q05

將「頭兩次皆失敗」取補集，得 $1-(2/3)^2=5/9$。也可將第 1 次和第 2 次首次成功的機率相加。

Q06

第一次若取紅，剩四球只有二紅，第二次的條件機率是 1/2，不等於初始 3/5。條件率改變，不能把兩次當同率的獨立試驗。

Q07

$P(N=1)=3e^{-3}$，$P(N=0)=e^{-3}>0$，兩者的指數因子相消後比值為 3。

Q08

加上 k=0、1、2 三項：$e^{-1}+e^{-1}+(1/2)e^{-1}=(5/2)e^{-1}$。

Q09

第一次必然成功，T 恆為 1，$P(T>1)=0$。這裡的 T 包含成功當次，不能寫成 0 次。

Q10

不能。例如兩次共用同一次擲幣結果，會同時成功或同時失敗；恰一次成功率是 0，與獨立模型的 1/2 不同。

第11章 分布函數與常態初識

11.1 分布函數累積到門檻，密度在區間上取面積

累積分布函數（CDF）F(x)=P(X≤x)，累積時把 x 這一點也算入。若 a<b，則 P(a<X≤b)=F(b)−F(a)。CDF 介於 0 與 1，非遞減，右連續，左右端極限分別為 0、1。左極限 F(x−) 對應 P(X<x)，所以 F(x)−F(x−)=P(X=x)。有限離散分布的 CDF 在正質量點向上跳，跳幅才是該點的質量，不是整個累積高度。

若模型有密度 f，則 f≥0、全實線上的積分為 1，P(a<X≤b)=從 a 到 b 積分 f。單一點沒有面積，P(X=x)=0；因此在這種模型中，區間端點開閉不影響機率。密度在某點的高度不是機率，也可大於 1。反過來，CDF 連續只保證沒有點質量，不保證存在密度。

標準常態 Z 的密度 φ(z)=e^(−z²/2)/√(2π)，CDF 記 Φ，平均 0、變異數 1。歸一化與這兩個矩是常態分布的標準結果，本冊不推導高斯積分。因分布左右對稱，Φ(0)=1/2、Φ(−z)=1−Φ(z)。若 X~N(μ,σ²) 且 σ>0，Z=(X−μ)/σ 即為標準常態；先換門檻，再用 Φ 取面積。Φ 的一般數值須用表或數值運算近似。

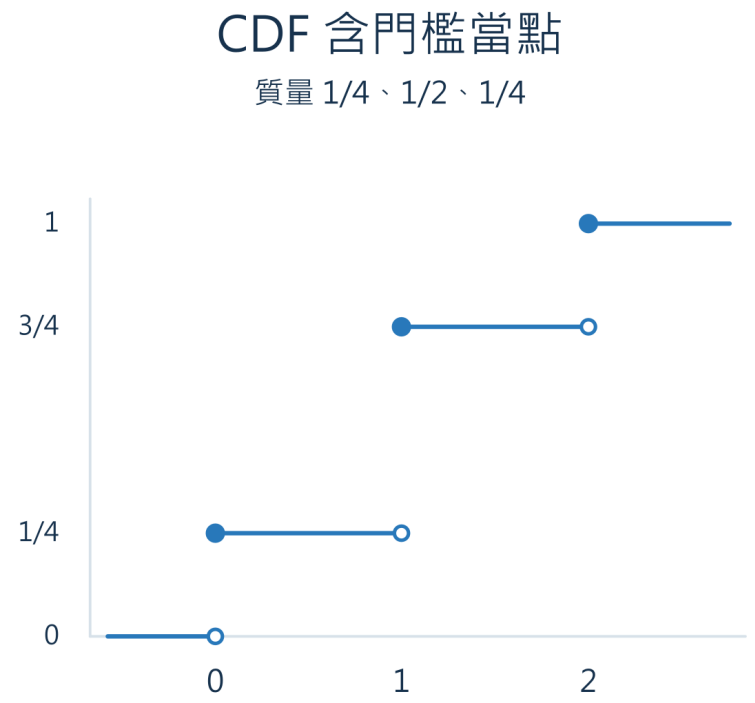


圖21 | 在 0、1、2 的質量為 1/4、1/2、1/4，CDF 在三個點各跳相應高度，實心點是含該點的值。

11.2 四個例題

例題1 階梯的跳高和累積高度

X 在 0、1、2 的質量為 1/4、1/2、1/4。在 x<0 時 F=0；0≤x<1 時為 1/4；1≤x<2 時為 3/4；x≥2 時為 1。於 x=1 向上跳 1/2，是 P(X=1)；F(1) 則還包含 X=0 的質量。

例題2 用第七冊的積分找連續機率

設 f(x)=2x 當 0≤x≤1，其餘為零。非負且由原函數 x^2 得總面積 1。對 0≤x≤1，F(x)=x^2；P(X>1/2)=1−(1/2)²=3/4。f(1/2)=1 是密度，P(X=1/2) 仍是零。

例題3 看標準常態的中央面積

$P(-1\le Z\le 1)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$。用 $\Phi(1)\approx 0.84134$ 得中央面積約 0.6827（四位小數）。對稱是為了只查一個門檻，不表示每段等長區間的機率相同。

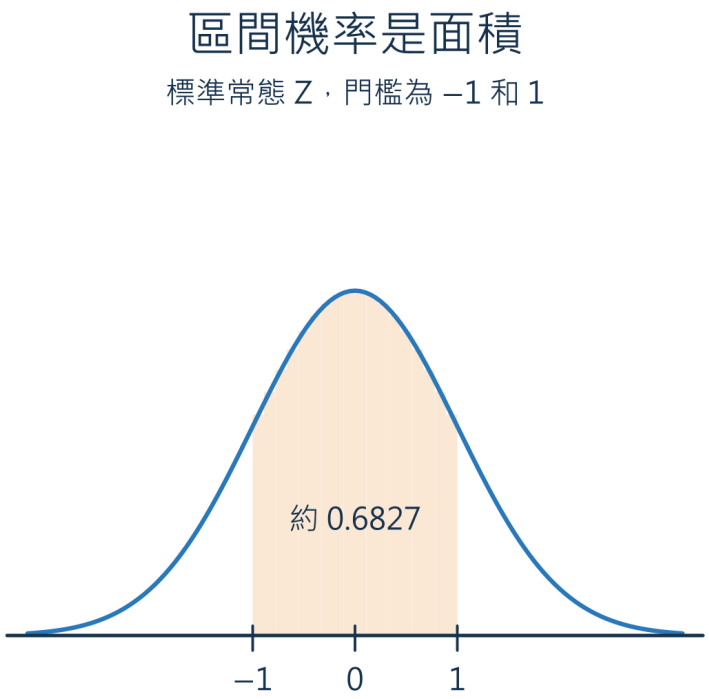


圖22 | 標準常態在 −1 和 1 之間的面積約為 0.6827，不是曲線高度。

例題4 原始門檻先換成標準單位

若 $X\sim N(50,4^2)$，要求 $P(X>54)$。轉成 $Z>(54-50)/4=1$，查得右尾 $1-\Phi(1)\approx 0.1587$。用除數 4，不是 16；標準化要除標準差。

11.3 練習

1 **B11-C11-Q01** 沿用例題 1，F(1/2) 和 F(1) 分別多少？

2 **B11-C11-Q02** 用上題 CDF 算 P(0<X≤1)。

3 **B11-C11-Q03** 在 1 到 3 密度恆為 1/2，其他為零。求 P(1.5≤X≤2.5)。

4 **B11-C11-Q04** 若 X~N(10,2²)，X=6 對應的 z 值？

5 **B11-C11-Q05** 沿用該常態，P(X≥10) 多少？

6 **B11-C11-Q06** 可用 σ=0 去套常態標準化嗎？

7 **B11-C11-Q07** Φ(−z) 可否寫成 1−Φ(z)？為什麼？

8 **B11-C11-Q08** 在 0 到 1/4 密度恆為 4，其餘零。它合法嗎？

9 **B11-C11-Q09** X~N(10,2²)，求 P(X≤8) 的標準形式及近似。

10 **B11-C11-Q10** 某 CDF 連續，P(X=x) 為何？是否因此一定能用密度積分？

11.4 完整解答

Q01

門檻 1/2 只含 0，得 1/4；門檻恰為 1 則含 0 與 1，得 1/4+1/2=3/4。

Q02

相減 F(1)−F(0)=3/4−1/4=1/2。0 不在事件內，1 有算進去。

Q03

先核對總面積 (3−1)/2=1。所求區間長 1，面積是 1·1/2=1/2，端點本身零質量。

Q04

中心為 10、標準差為 2，代 z=(6−10)/2=−2，即比平均低兩個標準差。

Q05

10 是對稱中心，左右兩半各占 1/2。X=10 沒有質量，是否含等號都一樣。

Q06

不可。標準化除以 σ，本冊正常常態模型須 σ>0。如果 X 恆為 μ，應直接用單點分布處理。

Q07

可以。標準常態左右對稱，左邊到 −z 的面積等於 z 右側的面積；z 點沒有質量，故尾端機率是 1−Φ(z)。

Q08

非負且面積 4·(1/4)=1，故合法。高度大於 1 不違反機率上限；區間的面積才是機率。

Q09

標準門檻是 −1，所求 Φ(−1)=1−Φ(1)≈0.1587。可和對稱的 P(X≥12) 互相校驗。

Q10

連續使跳幅為零，所以每點的質量都是零。但無跳點不能獨自保證存在密度；只有已知模型有密度時，才可按密度積分。

第12章 IID與極限定理導讀

12.1 平均變穩和波動形狀是兩個問題

IID 是獨立且同分布：每次使用相同分布，而且任意有限組的聯合機率按獨立規則相乘。只有相同邊際不夠；把同一個隨機結果抄成很多份，不會產生獨立樣本。設 $X_1,\dots,X_n$ 是 IID 變數，公共平均 μ、公共變異數 σ^2。把樣本平均寫作 $M_n=(X_1+\cdots+X_n)/n$；有些教材用 X 上加一橫表示同一個量。期望的線性性給 $E[M_n]=\mu$；獨立使交叉協方差全為零，故 $\mathrm{Var}(M_n)=\sigma^2/n$。

若 σ^2 有限，對 $\varepsilon>0$，事件 $|M_n-\mu|\ge\varepsilon$ 上的偏差平方至少 ε^2，故 $\sigma^2/n=E[(M_n-\mu)^2]\ge\varepsilon^2P(|M_n-\mu|\ge\varepsilon)$。得到 Chebyshev 上界 $P(|M_n-\mu|\ge\varepsilon)\le\sigma^2/(n\varepsilon^2)$。固定 ε，當 n 越來越大，這個機率趨向 0。這是有限變異數情形的弱大數律，說明樣本平均會集中到真均值附近，並不表示沿每條樣本路徑誤差每次都下降。

中央極限定理回答另一題。對 IID 且 $0<\sigma^2<\infty$，將 $M_n-\mu$ 除以 $\sigma/\sqrt{n}$，所得 Z_n 的 CDF 在每個實數門檻趨近標準常態 CDF Φ；亦可對總和減 $n\mu$、除以 $\sigma\sqrt{n}$。大數律讓平均本身集中，中央極限定理則把變小的波動放大到可比較尺度，再描述其形狀。這是極限結論，有限 n 的離散分布不會因此變成恰好常態；嚴格證明留到第十七冊。

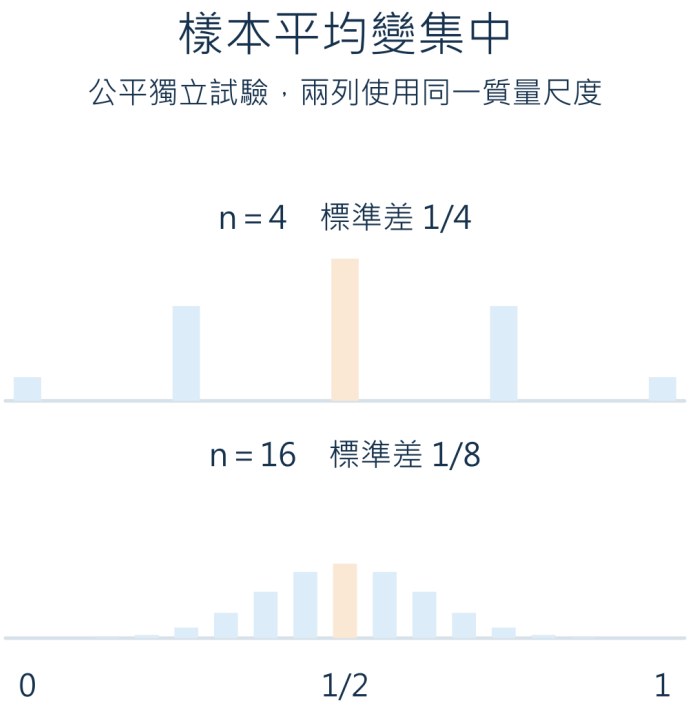


圖23 | 公平指標的樣本平均，n=4 和 n=16 的分布中心都在 1/2，後者在中心附近更集中。

12.2 四個例題

例題1 平均的變異數比單次小

公平幣的正面指標平均 1/2、變異數 1/4。16 次獨立試驗的總和變異數是 16·(1/4)=4，平均要再除以 16²，得 1/64。平均的標準差是 1/8，而不是單次標準差 1/2。

例題2 用上界估計偏離機率

n=400 個公平獨立指標。距離 1/2 至少 1/10 的機率至多 (1/4)/(400·(1/10)²)=1/16。這只給上界，真正機率可能更小；增加 n 降低這個上界。

例題3 以樣本平均的標準差作分母

IID 變數的 μ=6、σ=2，樣本量 25。M_{25} 的標準差為 2/√25=2/5；觀測平均 6.8 時，標準化是 (6.8−6)/(2/5)=2。這只是原門檻換成標準尺度，不保證 n=25 的尾端機率恰好等於常態近似值。



圖24 | 同一偏差以標準誤來量；均值 6、標準差 2、n=25，平均 6.8 在標準尺度上是 2。

例題4 複製不是獨立抽樣

只擲一次公平幣得 Z，再置 X_i=Z。每個 X_i 的邊際一樣，但只要知道一份就知道全部，故不獨立。平均恆等於 Z，變異數始終 1/4，不會按 n 除小。這指出前面公式中獨立性的作用。

12.3 練習

1 **B11-C12-Q01** IID 每次均值 3、變異數 4，取 25 次，求平均的期望與變異數。

2 **B11-C12-Q02** 沿用上一題，平均的標準差？

3 **B11-C12-Q03** 在 $\sigma^2=1$、$\varepsilon=1/2$ 時，上界要不大於 1/10，n 至少多少？

4 **B11-C12-Q04** 兩個變數分布相同但總是相等，而且都可能為 0 或 1 各半，它們是 IID 嗎？

5 **B11-C12-Q05** $\mu=2$、$\sigma=3$、$n=9$，觀測平均 4 時，標準化值多少？

6 **B11-C12-Q06** IID 時，總和的標準化分母是 σn 還是 $\sigma\sqrt{n}$？

7 **B11-C12-Q07** 大數律是否保證第 n+1 次平均更接近 μ？

8 **B11-C12-Q08** 若 $\sigma=0$，可以用中央極限定理的標準化式嗎？

9 **B11-C12-Q09** 公平獨立試驗做 100 次，成功率估計離 1/2 至少 1/10 的 Chebyshev 上界？

10 **B11-C12-Q10** 把樣本量從 n 加到 4n，平均的標準差變成幾倍？

12.4 完整解答

Q01

期望仍為 μ=3。總和的變異數為 25·4，再除 25²，得平均變異數 4/25。

Q02

開非負平方根 √(4/25)=2/5。它是平均本身的標準差，不是單次的 2。

Q03

Chebyshev 上界是 1/(n/4)=4/n。要求 4/n≤1/10，得到 n≥40；40 時上界正好 1/10。

Q04

不是。兩者分布相同，但知道第一個值便知道第二個值。雙 1 機率 1/2，和獨立時的 1/4 不等。

Q05

先算平均的標準差 3/√9=1，再取 (4−2)/1=2。

Q06

總和變異數是 nσ²，取平方根得 σ√n。σn 是把每次標準差直接相加，未反映變異數相加。

Q07

不保證某次的誤差必減。例：公平指標前兩次是 0、1，平均正好 1/2；第三次若是 1，平均反變成 2/3。極限機率與逐步單調是兩回事。

Q08

不行，公式除以 σ。若每次幾乎必然等於 μ，平均也不會波動，不需要用有正標準差的常態模型。

Q09

單次變異數 1/4，代入得 (1/4)/(100·1/100)=1/4。這不是在聲稱精確機率為 1/4。

Q10

原為 σ/√n，新為 σ/√(4n)=σ/(2√n)，故在 σ>0 時變成一半；對應變異數變成四分之一。